CUADERNOS DE APOYO DIDÁCTICO

SECUNDARIA BÁSICA
Y ÚLTIMOS AÑOS DE LA PRIMARIA

Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza

Verónica Grimaldi
Horacio Itzcovich
Andrea Novembre

SANTILLANA

CUADERNOS DE APOYO DIDÁCTICO

SECUNDARIA BÁSICA
Y ÚLTIMOS AÑOS DE LA PRIMARIA

Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza

Verónica Grimaldi
Horacio Itzcovich
Andrea Novembre

Coordinación de la serie
"Cuadernos de apoyo didáctico":
Claudia Broitman

SANTILLANA

Av. Leandro N. Alem 720 (C1001AAP), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723
Impreso en Argentina. *Printed in Argentina*.
Primera edición: XXXXXXXXXXXXXX de 2017.

Este libro se terminó de imprimir en el mes de XXXXXXXXXXXX de 2017, en XXXXXXXXXXXXXXX, XXXXXXXXXXX, XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX, República Argentina.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La entrada de los alumnos en el trabajo algebraico es una preocupación de los profesores de matemática de las escuelas medias y de las investigaciones didácticas desde hace muchos años. No son pocos los ensayos que se han hecho al respecto intentando que los estudiantes se involucren en diferentes tipos de actividades que van desde la resolución de ecuaciones, pasando por la posibilidad de generalizar propiedades, manipular expresiones algebraicas, etc. Es claro que algunos de esos intentos resultaron entusiastas, pero muchos otros se perciben en términos de frustraciones, tanto para los alumnos como para los profesores.

El trabajo con las ecuaciones en la escuela secundaria resulta, sin dudas, un problema para la enseñanza. Hay diferentes investigaciones que identifican numerosas cuestiones por las cuales resulta complejo su abordaje: el uso de las letras, el asunto de las incógnitas, el tema de la cantidad de soluciones, las técnicas que involucra, etc.; en particular cuando se introducen estas ideas a alumnos que, en general, provienen de un trabajo apoyado fuertemente en la aritmética, como no podría ser de otra manera en la escuela primaria.

Todas estas dificultades nos han llevado a decidir la elaboración de este material. Tenemos la intención de que aporte al debate abierto sobre los problemas de enseñanza que involucran el trabajo con las ecuaciones en las escuelas secundarias.

En la mayoría de los diseños curriculares de las diferentes jurisdicciones, de una u otra manera, se hace referencia al trabajo con ecuaciones. En algunos casos en el terreno funcional, en otros casos dentro del campo numérico, en ciertas jurisdicciones en términos exclusivamente algebraicos e incluso asociado a un cambio de "lenguaje". Más allá de las diferencias que existen entre unos y otros, en todos los casos se hace referencia a que el trabajo matemático debe estar asociado a la resolución de problemas –matemáticos o extramatemáticos– y a su vez se pone el acento en los procesos de modelización. Creemos que estas perspectivas provocan, al menos, ciertas tensiones al momento de pensar en torno de su enseñanza: ¿conviene encarar las ecuaciones desde las funciones? ¿Y la resolución de esas ecuaciones, es decir, la técnica, se trabaja junto con las funciones? ¿Conviene tratar con los diferentes modelos matemáticos –lineal, cuadrático, exponencial, etc.– y allí adentro meterse con las ecuaciones? ¿Cómo sería un problema que abone a la elaboración de una técnica de resolución de una ecuación? ¿Qué lugar podría ocupar el uso de recursos tecnológicos, como ser el programa GeoGebra? Estos son algunos de los interrogantes que entendemos promueven tales tensiones, que no resultan ser de fácil tratamiento.

Este material propone un recorrido que trata sobre diferentes cuestiones que entendemos colaboran en la necesaria reflexión sobre la enseñanza de las ecuaciones en la escuela secundaria. Se inicia con el capítulo I, que remite a diferentes aspectos vinculados al desarrollo histórico de este objeto. Comienza por poner en evidencia la complejidad que ha adquirido el asunto de las escrituras así como sus transformaciones, pasando por el uso de palabras, abreviaturas, dibujos, símbolos, etc. Incluso destaca los desafíos que implicaron los procesos de resolución, asociados precisamente a las dificultades que presentaban las expresiones que se utilizaban así como las relaciones entre los problemas que se pretendía resolver y las técnicas que se fueron desarrollando. Estas cuestiones nos permiten, al menos, interrogarnos sobre la complejidad que ha resultado intentar dar cuenta, mediante escrituras, de ciertas relaciones matemáticas, aspecto que nos demanda algunas reflexiones a la hora de pensar la enseñanza.

El capítulo 2 se ocupa de destacar algunos asuntos que resultan problemáticos al momento de invitar a los alumnos al trabajo en torno de las ecuaciones. Allí se pone en evidencia la complejidad del pasaje del trabajo aritmético al trabajo algebraico, interpretando las continuidades y las rupturas que conlleva, tanto en relación con aquellos aspectos asociados al contexto como a la supuesta naturalidad de las técnicas. Por otro lado, advierte sobre ciertos asuntos que, si bien pueden relacionarse con los procedimientos, implican cuestiones enmarcadas en las escrituras y que demandan desnaturalizaciones necesarias para su tratamiento.

En esta misma dirección se señala el asunto del sentido que van adquiriendo los símbolos como uno de los aspectos a considerar al momento de diseñar propuestas de enseñanza. Es la relación entre lo conocido y lo nuevo lo que está en juego.

El capítulo 3 vuelve sobre aspectos que se presentan en el capítulo 2, pero atendiendo específicamente a las relaciones que se podrían establecer entre algunas prácticas de la escuela primaria y ciertas prácticas que se pretende desplegar en la escuela secundaria. En este sentido, se centra la atención en dos objetos de enseñanza: las operaciones y las nociones de múltiplos y divisores. Tanto uno como otro son conocimientos que habilitarían, bajo ciertas condiciones, volver sobre relaciones matemáticas que han sido objeto de trabajo en el nivel primario y permitirían "subir la apuesta" hacia un tratamiento algebraico, no pensando en las escrituras, sino más bien en términos de prácticas que alojan la idea de transformar un cálculo en otro equivalente, así como leer información que porta un cálculo, más allá del resultado. Pensamos en este tipo de trabajo como uno de los puentes posibles entre ambos niveles de la escolaridad.

El capítulo 4 involucra el análisis de algunas propuestas de enseñanza que ponen el acento en la relación entre el sentido que adquieren o podrían adquirir las ecuaciones y ciertas técnicas de resolución. Se busca en este caso poner en el centro las relaciones entre problemas y técnicas, destacando algunas propuestas que consideran aquellos problemas de la enseñanza que han sido desarrollados en capítulos previos y sientan las bases para elaborar propuestas de enseñanza que intentan caracterizar diferentes tipos de ecuaciones así como las relaciones internas que se juegan en cada una de ellas. En esta misma dirección, se trata de asociar las técnicas de resolución con la idea de solución de una ecuación y estas cuestiones con las propiedades de las operaciones y las transformaciones que admiten.

El capítulo 5 incorpora un aspecto del trabajo en torno de las ecuaciones que implica el uso de recursos tecnológicos. En particular, se propone abordar algunas cuestiones del tratamiento de las ecuaciones mediante una hoja de cálculo del programa GeoGebra, así como de los gráficos que posibilita este mismo programa. Escribir una fórmula en una planilla de cálculo implica, entre otros desafíos, dar cuenta de la variabilidad. La noción misma de variable está latente y la relación entre resultados y valores de la variable se pone en funcionamiento. Sostenemos que el juego entre fórmula, ecuación y resultado colabora en el trabajo, pero, a su vez, el uso de los gráficos asociados a ciertas ecuaciones abre un panorama que permitiría un trabajo más rico al posibilitar tratar un mismo objeto desde diferentes marcos[1] y tenerlos todos disponibles en simultáneo en la pantalla de la computadora o del celular.

Esperamos que este material pueda constituirse en insumo de debates entre colegas, generar nuevas preguntas y reflexiones sobre la enseñanza de las ecuaciones e invite a los profesores a explorar, ensayar e indagar sobre diferentes recursos, sentidos y prácticas que intentamos compartir a través de este texto.

1. Douady, R. (1986) considera un marco -exponemos una versión muy simplificada- a una cierta "zona" de la matemática (álgebra, geometría, etc.) de la que forman parte ciertos objetos, sus relaciones, representaciones -incluso las mentales-. El cambio de marcos permitiría un nuevo tratamiento de los problemas y dificultades que emergen así como la elaboración de nuevas técnicas que no resultan habilitadas por una primera aproximación.

CAPÍTULO I

BREVE PASEO
POR LA HISTORIA

ECUACIONES Y ESCRITURAS

La palabra *ecuación* suele remitirnos a la idea de escrituras con letras, números, símbolos de operaciones y el signo igual. El vínculo entre este objeto matemático y las escrituras que intentan representarlo es, para nosotros, fundacional. Sin embargo, esta relación no ha sido siempre igual, y si bien la historia del álgebra y las ecuaciones puede remontarse incluso a varios siglos antes de Cristo, no ha sido sino hasta los siglos XVII-XVIII que se hizo más profunda y comenzó a estandarizarse.

Veamos de qué manera el matemático italiano Rafaele Bombelli simbolizaba y transformaba ciertas expresiones algebraicas para resolver una ecuación en el año 1572 (Cajori, 1993, pp. 117 y 125-126).[2]

Rafaele Bombelli:

Notación de Bombelli	**Notación moderna**
4.p.R.q.L 24.m.20.⌋ Eguale à 2.	$4+\sqrt{24-20x}=2x$

Pero lejos de tratarse de notaciones compartidas, otros matemáticos de la misma época utilizaban modos diferentes de escribir las ecuaciones y sus resoluciones. Presentamos algunos ejemplos a continuación.

Girolamo Cardano (1539):

Notación de Cardano	**Notación moderna**
1. quad. p̃. 2. pos. aeq. 48.	$x^2+2x=48$
r. p^m p̃. 6. cub. 80	$x^6+6x^3=80$
$r^m p^m$ 7. quad. p̃. 4.	$x^5=7x^2+4$
7. pos. p̃. 3. qua. aequal. 122.	$7x+3y=122$

2. En este libro es posible encontrar numerosas escrituras diversas; aquí solo hemos seleccionado algunas, con el solo fin de asomarnos a esta diversidad.

Francesco Ghaligai (1552):

Notación de Ghaligai	Notación moderna
$\frac{1}{4}\ \square\ di\ \square\ \tilde{m}\ \frac{1}{4}\ di\ \square$ — $1\ \square$	$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x^2=x^2$
$\frac{1}{4}\ \square\ di\ \square$ — $1\frac{1}{4}\ di\ \square$	$\frac{1}{4}x^4=1\frac{1}{4}x^2$
$\frac{1}{4}\ \square$ — — — — $1\frac{1}{4}\ \tilde{n}$	$\frac{1}{4}x^2=1\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}\ \square\ \square\ \mathring{m}\ 4\ \square$ — — — $4\ \square$	$\frac{1}{4}x^4-4x^2=4x^2$
$\frac{1}{4}\ \square\ \square$ — — $8\ \square$	$\frac{1}{4}x^4=8x^2$

Numerosos matemáticos han utilizado notaciones diversas, muchas de las cuales no prosperaron más allá de sus propias obras.[3] En general, cada uno retomaba algunos símbolos que habían utilizado otros matemáticos que gozaban de su aprecio, y proponían nuevos con el afán de marcar cierta tendencia entre sus colegas. Sin embargo, esto solo sucedía si se tenía cierta reputación dentro de la comunidad matemática.

Un ejemplo interesante de este proceso corresponde a la historia del signo igual. Una versión de este símbolo, similar a la que conocemos hoy en día, fue propuesta por primera vez por el matemático galés Robert Recorde en 1557.[4] En su obra *The Whetstone of Witte*, declara:

"Para evitar la tediosa repetición de las palabras: 'es igual a', pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o rectas gemelas de la misma longitud, así: ═══, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales".

Pero no es sino hasta el siglo XVIII, después de que matemáticos como Gottfried Leibniz e Isaac Newton –más reconocidos que Recorde– adoptan y difunden este símbolo, que se instala en la comunidad matemática de manera estable.

3. Incluso es posible encontrar variaciones para un mismo símbolo en un mismo autor y dentro de una misma obra, lo cual nos da una idea de la inestabilidad y la ausencia de estandarización.

4. En el artículo "Robert Recorde: el creador del signo igual" publicado en la revista *Suma* Nº 57 (2008), se puede encontrar una interesante reconstrucción de esta historia. Disponible en: https://revistasuma.es/IMG/pdf/57/089-095.pdf

La progresiva utilización de abreviaturas de palabras y la introducción de símbolos específicos tuvo, como en los casos que hemos analizado, la función de acortar las escrituras, simplificarlas, evitar repeticiones tediosas. Sin embargo, hubo asimismo una intención más profunda, vinculada a la idea de generalidad:

"En Francia, finalizado el siglo XV, François Viète (1540-1603) introdujo (…) la utilización de letras para expresar en forma general los datos de un cierto problema, además de la designación de la incógnita con un símbolo, que ya era usual en esa época (elige vocales para las incógnitas y consonantes para los datos genéricos). El plan de Viète, amante de los clásicos griegos, consistía en copiar de la geometría el tratamiento de lo general, con el uso de letras para designar 'un número cualquiera', así como Euclides usaba letras en la demostración de un teorema para hablar de 'un triángulo cualquiera'" (Sessa, 2005).

ECUACIONES Y PROBLEMAS

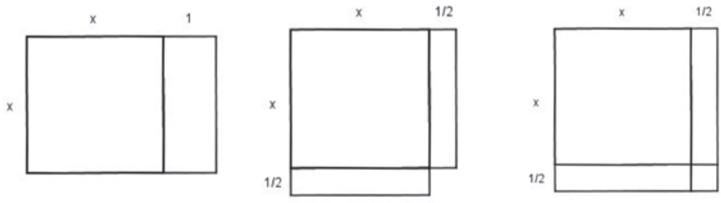
Hoy en día, nos resulta difícil imaginar las ecuaciones si no es a través de sus escrituras, y los modos de resolverlas mediante procedimientos que van transformando una expresión en otra equivalente. Pero como hemos dicho en párrafos anteriores, la historia de las ecuaciones es de larga data, y cabe entonces preguntarnos cómo hacían los matemáticos de otras épocas para trabajar en el dominio de las ecuaciones sin contar con "nuestras" escrituras algebraicas.

El hecho de no disponer de escrituras como las actuales no significa que no hubieran desarrollado procedimientos más o menos sistemáticos para resolver problemas de un cierto tipo. Si nos remontamos a los primeros problemas "de ecuaciones" que se han recogido en la cultura babilónica, hallamos situaciones que involucran ecuaciones lineales y cuadráticas. Para los problemas lineales, uno de los métodos que utilizaban se denomina "de la falsa posición". Consiste en postular un valor para la incógnita, reemplazarlo en la serie de cálculos y comparar el resultado obtenido con el que debía obtenerse. Este modo de proceder nos recuerda a aquel que muchos de nosotros –incluidos los alumnos– ponemos en juego cuando le damos un valor a la x –a veces estimando, otras veces al azar– y luego lo ajustamos a partir de su evaluación en la ecuación.

En el caso de las situaciones cuadráticas, los escritos que se han encontrado refieren en todos los casos a problemas geométricos de áreas y longitudes. En el siguiente ejemplo se muestra de qué manera enunciaban y dejaban registro de la resolución del problema.[5]

"He sumado el cuadrado y mi lado obteniendo ¾. Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1, ½. Multiplicarás ½ por ½, ¼. Agregarás ¼ a ¾, 1. Sacarás su raíz cuadrada, 1. Restarás el ½ que has multiplicado de 1, ½. Ese es el lado del cuadrado".[6]

Los babilonios escribían el proceso de resolución de estos problemas de manera coloquial, y desde nuestros conocimientos actuales podríamos realizar una interpretación en el marco geométrico, utilizando esquemas que representen las figuras de referencia y las sucesivas acciones de fraccionar, poner, quitar, sumar y restar. Esto nos lleva a considerar el siguiente dibujo, que podría representar el procedimiento para "completar cuadrados" que conocemos y utilizamos hoy en día, más vinculado a escrituras algebraicas.



5. Los babilonios utilizaban un sistema de numeración de base sesenta (del que heredamos nuestro sistema sexagesimal para medir el tiempo y los ángulos). Este hecho, sumado al tipo de lenguaje propio de esa cultura en esa época, hace que los textos de los problemas y sus procedimientos de resolución resulten un tanto "oscuros". En este libro hemos decidido presentar directamente las interpretaciones de dichos problemas en lenguaje moderno, usando el sistema decimal.

6. Un análisis detallado de este ejemplo se encuentra en Sessa (2005).

Una marca en la historia del álgebra que los historiadores reconocen como punto de inflexión ha sido la obra del matemático griego Diofanto, en el siglo II d.C. En principio, se le atribuye un avance importante en relación con las notaciones: el uso de la letra griega ξ –siempre la misma– para designar una cantidad desconocida, que llamó *arithmo* (número). Pero este avance no es solamente una cuestión notacional. La verdadera revolución que provoca Diofanto tiene que ver con el tratamiento de su *arithmo* (aun si no se conoce su valor), en paridad de condiciones con los números. Este movimiento le permite operar con estos objetos de una manera similar con la que se operaría con números conocidos (Radford, 1992).

Diofanto plantea los problemas de una manera general, como un conjunto de problemas de un mismo tipo, por ejemplo: "Hallar dos números conociendo su suma y su producto", que en lenguaje algebraico moderno podríamos simbolizar de este modo:

$x + y = a$

$x \cdot y = b$

Para su resolución –que brinda en lenguaje coloquial– se apoya en ejemplos numéricos. En este problema en particular propone $a = 20$ y $b = 96$.[7] Esta manera de tratar los problemas ha sido interpretada por algunos historiadores como una debilidad de su obra, como si su *Arithmetica* fuera solo un compendio de problemas resueltos sin ningún rastro de generalidad, aspecto que le estaría "faltando" a sus ideas. Sin embargo, seguimos a Radford (1997) cuando se opone a este modo de analizar la historia: "Cuando los métodos de Diofanto son mirados desde su propio marco histórico-epistemológico –lo que requiere, por un lado, reconstruir sus vínculos con el método de la falsa posición de los babilonios y los egipcios, y, por otro lado, con los procedimientos geométricos de 'cortar y pegar'– sus métodos aparecen como muy sofisticados".

7. Es posible encontrar un análisis de este problema en Sessa (2005) y en Radford (1996b).

Nos resulta interesante considerar en este punto la potencia de esta perspectiva para analizar las producciones de nuestros alumnos, no en tanto maneras parciales e incompletas de conocer –porque las comparamos con otras formas que consideramos más "evolucionadas" (las nuestras o las canónicas)–, sino como formas genuinas de conocimiento con sentido en sí mismas. Estos modos de conocer están construidos sobre conocimientos anteriores que fueron retomados, revisados, transformados, y sobre los cuales se han elaborado nuevas formas de conocer, muchas veces más potentes que las anteriores gracias a los avances propiciados por la participación de los alumnos con sus ideas en la comunidad de estudio del aula. "(…) las matemáticas, como cualquier otra actividad humana, necesita ser relocalizada en sus diferentes contextos socioculturales. Al hacer esto, comenzamos a ver los eventos pasados (y también los modernos) de maneras más ricas, que nos brindan una comprensión más profunda del conocimiento matemático" (Radford, 1996a).

LAS ECUACIONES COMO OBJETO MATEMÁTICO

En este breve recorrido histórico, no podremos incluir a muchos matemáticos que han contribuido al desarrollo del álgebra. Sin embargo, no queremos dejar de mencionar a Al-Kowarismi[8] (siglo IX d.C.). Este matemático de origen árabe dio un paso crucial, siendo su obra *Precisiones sobre el cálculo del al-jabr y al-muqabala*[9] la primera en presentar las ecuaciones como objetos en sí mismos.

Al-Kowarismi no utiliza ningún tipo de símbolo en su obra, y aun así estudia de manera exhaustiva la resolución de ecuaciones de segundo grado con coeficientes positivos. Identifica cinco casos de ecuaciones cuadráticas y una lineal, que son tratadas como formas canónicas, y presenta de manera detallada, en lenguaje coloquial y a través de ejemplos numéricos, las maneras de resolver cada una de ellas. Asimismo, presenta los modos de reducir cualquier ecuación a una de las formas canónicas. Las

8. Su nombre se reconoce como el que dio origen a la palabra "algoritmo".

9. La palabra *al-jabr* dio origen a "álgebra".

dos operaciones fundamentales para realizar estas tareas son *al-jabr* (completar, agregar) y *al-muqabala* (balancear, oponer), que podemos interpretar tanto desde el marco geométrico –completar y retirar cuadrados respectivamente– como desde el marco algebraico –sumar o restar la misma cantidad a ambos miembros–.

Nos resulta interesante la perspectiva que nos presenta Carmen Sessa (2005) sobre la relación entre la obra de Al-Kowarismi y los saberes de la época. Ella destaca dos cuestiones: por un lado, que un análisis profundo de la obra de este matemático permite hallar las filiaciones de esta nueva producción con otros conocimientos plenamente reconocidos en la comunidad matemática. Es posible distinguir allí los tratamientos babilónicos de las ecuaciones y también la tradición demostrativa de la geometría de Euclides, que le aportaba no solo rigurosidad, sino también un carácter necesario.

En segundo lugar, y vinculado con lo anterior, dado que se trataba de una "presentación en sociedad" de métodos nuevos, estos debían estar "avalados" por otros conocimientos socialmente reconocidos. Es por ello que Al-Kowarismi utiliza, al final de su método, un dibujo de la figura geométrica resultante, luego de haber realizado la sucesión de pasos que había detallado en lenguaje coloquial, a modo de validación.

Esta relación entre conocimientos socialmente reconocidos y conocimientos nuevos nos permite volver con una nueva mirada sobre algunos aspectos de la producción y circulación de ideas matemáticas en la escuela. Puesto que, al iniciarse en el estudio de las ecuaciones y ciertos modos de resolverlas, nuestros alumnos disponen de muchos conocimientos "socialmente reconocidos" (por la comunidad de esa clase), ¿de qué maneras podrían proponerse desde la enseñanza situaciones que los habiliten a utilizar dichos conocimientos tanto para producir como para validar las nuevas ideas?

CAPÍTULO II

ALGUNOS PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES

"Había que encontrar una respuesta", afirman Delia Lerner y Patricia Sadovsky (1994) en su ya clásica investigación acerca del problema que supone la enseñanza del sistema de numeración en los primeros años de la escolaridad. ¿Por qué –se preguntan–, a pesar de los numerosos esfuerzos por diseñar actividades y elaborar recursos didácticos que permitan abordar con simplicidad ciertas ideas, los alumnos siguen mostrando enormes dificultades para acceder a ellas?

El estudio de las ecuaciones al inicio de la escuela secundaria podría enmarcarse en este mismo tipo de preocupación. Sin importar los esfuerzos que despleguemos como docentes, incluso los alumnos que parecen dominar ciertas técnicas no logran comprender las razones que sostienen su funcionamiento. La mayoría se pregunta por qué ya no pueden resolver como lo venían haciendo hasta ahora –con cuentas "sueltas", estimando y ajustando–, y no advierten la potencia del álgebra para abordar los problemas que les proponemos. Muchas veces nos encontramos esgrimiendo razones como "si lo aprendés así, te va a resultar más fácil cuando tengas que resolver problemas más complicados", y también "si escribís todos los pasos, puedo ver si te equivocás en algún lado". Magras razones desde el punto de vista de los estudiantes, quienes, lejos de identificar la necesidad de ciertos objetos y técnicas, los utilizan en gran medida para complacernos y adaptarse a nuestros pedidos.

LAS ECUACIONES EN LA ESCUELA

La entrada al estudio del álgebra ha sido situada históricamente en el inicio de la escuela secundaria, luego de un largo recorrido de trabajo aritmético que se propone en la primaria. Esta decisión curricular se ha interpretado como una consecuencia evidente de la "naturaleza" de estas dos zonas de la matemática: la aritmética –se postula– trata de números, cálculos, casos particulares; el álgebra, acerca de relaciones, de lo general. El vínculo indiscutible entre estas dos zonas, así como la lógica de su presentación escolar –primero una, después y con cierta continuidad, la otra–, parece derivar de estas razones y naturaliza la idea de que una es prerrequisito de la otra. El desarrollo histórico aparentemente tardío del álgebra, posterior al amplio desarrollo de la aritmética, parece reforzar estas ideas, junto con cierta concepción de la enseñanza que postula la necesidad de ir "de lo simple a lo complejo" y "de lo concreto a lo abstracto".

Durante mucho tiempo, estas maneras de pensar la relación aritmética-álgebra han aparecido plasmadas en programas y diseños curriculares, proponiendo el ingreso al estudio del álgebra a través del planteo y resolución de ecuaciones vinculadas a problemas aritméticos. Ahora, estos podrían ser abordados con herramientas algebraicas y de este modo el "salto" de una zona de estudio a la otra sería más suave, menos problemático.

Pero, como exploramos en el capítulo anterior, la historia de la disciplina también nos ayuda a advertir que "los conceptos matemáticos se enmarcan en los modos de conocer propios de cada cultura, y que muchas culturas han conceptualizado números e incógnitas de diferentes maneras –a veces más aritméticas (como en el trabajo de Diofanto), a veces más geométricas (como en las matemáticas babilónicas)–" (Radford, 1992). La tendencia que tenemos a concebir el álgebra vinculada solamente con la aritmética, ¿necesitará ser revisada? ¿De qué otras maneras sería posible pensar las relaciones entre distintas zonas de la matemática, considerando los modos de producción y circulación del conocimiento en la cultura escolar?

Nos adentraremos ahora en un recorrido por ciertas prácticas usuales de enseñanza.

LAS ECUACIONES COMO PUNTO DE ACCESO AL ÁLGEBRA

Es usual que en el inicio del estudio del álgebra se les proponga a los alumnos problemas como el siguiente: Si al doble de mi edad se le suma 12, se obtiene 44 como resultado. ¿Cuántos años tengo? Este tipo de situación parece dar continuidad al estudio de problemas aritméticos que los alumnos han venido trabajando a lo largo de la escolaridad primaria. En efecto, los estudiantes están en condiciones de resolver estos problemas aun antes de que les hayamos enseñado algo "nuevo". Algunos plantean una serie de cálculos –en este caso, 44 – 12 = 32, y luego 32 : 2 = 16–, y otros resuelven “en la cabeza”, dando la respuesta sin presentar ninguna escritura.

Ahora bien, para los profesores es deseable que los alumnos escriban la ecuación que representa la situación y que luego vayan detallando la serie de pasos que permiten transformarla hasta llegar a la solución. Esta preferencia los lleva a presentar la noción de ecuación y de incógnita antes de proponer estos problemas, con la expectativa de que los alumnos los traduzcan a una ecuación y luego la resuelvan.

¿Qué reflexiones podemos plantear en torno a este desencuentro entre las estrategias que despliegan los alumnos y las expectativas de los docentes?

Un primer asunto que nos interesa analizar se vincula con el sentido con el que se estaría construyendo la noción de ecuación. Puesto que, desde el punto de vista de los estudiantes, este objeto se presenta sin tener necesidad de él, no se concibe más que como una imposición externa. Los alumnos aprenden a escribir y manipular ecuaciones sobre todo para responder a una demanda de los profesores, sin “enterarse” de su potencia.

Sobre este aspecto, recordemos que en la indagación que Panizza, Sadovsky y Sessa (1997) realizaron sobre la relación que los alumnos entablan con las ecuaciones, una de las respuestas típicas a la pregunta “¿Para qué te parece que usamos las letras en matemática?” fue “Para hacer más difícil y por lo tanto pensar más”. Este tipo de respuesta visibiliza la ajenidad y la ausencia de sentido con la que los estudiantes asumen el progreso del conocimiento matemático escolar: no se identifica ningún uso específico de las letras, sino tan solo una mayor dificultad, como si eso fuera un valor en sí mismo.

Algunos docentes consideran que este desencuentro puede remediarse pensando la diferencia entre estas dos maneras de proceder solo en el nivel de la escritura.

Proceder aritmético	Proceder algebraico
$44 - 12 = 32$ $32 : 2 = 16$ Respuesta: tengo 16 años.	$2 \cdot x + 12 = 44$ $2 \cdot x = 44 - 12$ $x = 32 : 2$ $x = 16$ Respuesta: tengo 16 años.

Desde esta perspectiva, la primera escritura del procedimiento de la derecha correspondería a la traducción literal del problema al lenguaje algebraico, mientras que las líneas siguientes de este mismo procedimiento serían "equivalentes" a los sucesivos cálculos del procedimiento aritmético. Para estos docentes, entonces, el pasaje de un procedimiento a otro podría conciliarse como una cuestión de traducción. Los alumnos deberán acostumbrarse a escribir lo que ya saben de una manera diferente.

Pero analicemos esta cuestión con un poco más de detalle. En sus prácticas aritméticas, los alumnos se han habituado a seleccionar ciertos datos del problema, vincularlos por medio de operaciones para averiguar resultados parciales que a su vez se combinarán con otros datos, para finalmente averiguar lo que se busca como respuesta al problema. Cada paso en esta manera de resolver tiene un significado al interior del problema –en nuestro ejemplo, el 32 representa el doble de la edad buscada–, y las eventuales escrituras numéricas que puedan producir representan este significado. El trabajo en contexto –en este caso, de personas y edades– muchas veces les sirve para elaborar su plan de acción y controlar lo que van planteando. Pero cuando se les pide que primero escriban la ecuación, los alumnos deben cambiar de "lógica", discriminando desde el principio datos de incógnitas para vincularlos de una sola vez. Por otro lado, cuando deben resolver la ecuación, las transformaciones sobre la expresión producida se rigen por ciertas propiedades de las operaciones, y no ya por los significados asociados al contexto del problema.

No estamos diciendo que no haya relación entre estos dos procedimientos, o que no se podría trabajar para vincularlos. Pero sí queremos señalar que no es cierto que se trate de “lo mismo escrito de otra manera”. No podemos dejar de advertir que, para quien está aprendiendo, estas dos maneras de proceder están lejos de ser equivalentes.

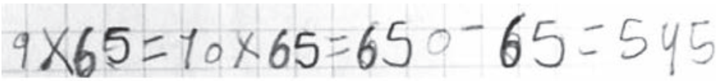
Hay una cuestión más que quisiéramos señalar, vinculada a un malentendido matemático que parece subyacer a este tratamiento. Cuando la pretensión frente a estos problemas es la de traducir del lenguaje coloquial al algebraico, se les pide a los alumnos *la* ecuación que representa la situación, como si esta fuera única. Por supuesto, los profesores sabemos que no existe una relación biunívoca entre ecuación y situación: existen muchos problemas que se representan con una misma ecuación y también existen muchas ecuaciones que pueden representar un mismo problema. Sin embargo, las propuestas usuales suelen no incluir a los alumnos en esta discusión, transmitiendo de manera implícita una idea equivocada.[10]

UN PRIMER PASO: LAS ESCRITURAS ARITMÉTICAS

La entrada al álgebra a través del estudio de ecuaciones puede interpretarse como un intento del sistema educativo de dar continuidad a la trayectoria de los alumnos, para que puedan apoyarse en los conocimientos aritméticos que han construido en su paso por la escuela primaria. Si ampliamos la mirada sobre el modo en que se ingresa a esta nueva zona de conocimiento, encontraremos que antes del estudio de las ecuaciones suele proponerse un período de trabajo aritmético con cálculos en un solo renglón. La idea de fondo es que los alumnos reinviertan aquí todo lo que han aprendido sobre resolución de cálculos durante la primaria, pero ahora escribiendo de otra manera –en un único renglón–. Este cambio, que puede parecer trivial desde el punto de vista experto, involucra complejidades que suelen aflorar en errores sistemáticos que producen los alumnos y que merecen ser considerados.

10. Para ampliar sobre esta cuestión recomendamos la lectura de Sessa (2005).

Uno de los errores más frecuentes en la manipulación de expresiones en un solo renglón es la violación de ciertas propiedades de la igualdad como relación de equivalencia. Analicemos un ejemplo.[11]



Para resolver el cálculo 9 x 65, este alumno tiene un plan de acción: teniendo en cuenta que 9 = 10 – 1, realizar el cálculo 10 x 65 –posiblemente más sencillo de resolver desde su punto de vista– y al resultado restarle 65. Podemos interpretar matemáticamente la validez de su razonamiento, considerando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la resta: 9 x 65 = (10 – 1) x 65 = 10 x 65 – 1 x 65 = 650 – 65 = 545. Sin embargo, el alumno no escribe esta serie de pasos. Él no está buscando ni comunicar ni asegurar la validez de su razonamiento, sino encontrar el resultado de un cálculo. El signo igual que presenta en el primer paso no intenta comunicar que los cálculos 9 x 65 y 10 x 65 son equivalentes; su escritura nos muestra su plan y sus acciones de cálculo.

Este tipo de error puede ser interpretado si tenemos en cuenta dos cuestiones: a la arbitrariedad de la escritura en un solo renglón se le agrega el sentido del signo igual (=) que los alumnos han construido durante su paso por la escuela primaria, y que se "choca" con otro sentido que suele vivir en la escuela secundaria.

En las escrituras aritméticas el signo igual puede cumplir dos funciones: anunciar un resultado –como en 10 + 5 = 15– o bien expresar la equivalencia entre expresiones –como en 10 + 5 = 9 + 6–. Pero el trabajo aritmético que se desarrolla usualmente en la primaria está más centrado en el primero de estos significados, y son escasas las propuestas que incluyen un tratamiento de la igualdad como equivalencia. Vemos en los ejemplos anteriores los efectos de este doble significado del signo igual: el profesor esperará que se lo use con un sentido de equivalencia, mientras que los alumnos lo usan para ir marcando el camino de resolución, como

11. Producción de un alumno del 1º año de la ES, recogido por la profesora Marisa Giovanniello en una escuela de la ciudad de La Plata en el año 2016.

si fuera un conector dentro de un relato ordenado de manera cronológica –primero se hace esto, luego esto otro, etcétera–.

En las escrituras algebraicas el signo igual siempre expresa una equivalencia. Considerando entonces que los alumnos ingresan en el estudio de las ecuaciones con una fuerte concepción de igualdad como anuncio de resultado, y una escasa o nula idea de igualdad como equivalencia, estamos en mejores condiciones para comprender las dificultades que podrían encontrar. Ciertas propuestas que, a los ojos de los docentes, parecen sencillas y en continuidad con el trabajo aritmético que vienen realizando los alumnos podrían encerrar complejidades inesperadas que sería necesario considerar desde la enseñanza.

LAS PROPUESTAS DE TRADUCCIÓN

Otra propuesta que suele vivir en el inicio del trabajo con ecuaciones es la de traducir del lenguaje coloquial al algebraico, y viceversa. Por ejemplo: *Escribí la ecuación que represente la siguiente situación: el anterior del doble de un número es 15. ¿Cuál es el número?*

En situaciones como esta, se espera que los alumnos adviertan la presencia de ciertas palabras que indican operaciones determinadas. En el ejemplo, al hablar de “doble”, los alumnos deberían interpretar que allí hay una multiplicación por 2; al leer “el anterior”, deberán reconocer que han de restar 1. Cabe preguntarse cuál es la actividad matemática que se despliega en este ejercicio de identificar palabras “clave”. Pero, además, implícitamente estamos suponiendo que el conjunto de números en el que se trabaja es el de los números enteros –en el que tiene sentido hablar de anteriores y siguientes– y, sin embargo, esta cuestión no suele ser motivo de discusión en la clase.

Analicemos otro aspecto problemático de las propuestas de traducción. Frente a la frase “El cubo de un número disminuido en 6 unidades”, los alumnos suelen producir dos escrituras: $x^3 – 6$ o bien $(x – 6)^3$. En algunos casos, estas dos escrituras –y otras que pudieran aparecer– son motivo de discusión e intercambios en el aula; en tal sentido, podrían considerarse, bajo ciertas condiciones, oportunidades de aprendizaje. Sin embargo, muchas veces la actividad se reduce a reconocer cuál de las dos escrituras es la correcta y cuál no. Aquí, algunos docentes dirán que la escritura correcta es la segunda ya que, para que corresponda a la primera, la frase debería ser "El cubo de un número, disminuido en 6 unidades". La sutil presencia de una coma en el texto se constituye, desde el punto de vista de los alumnos, en una "trampa" que le tiende el profesor. Algo similar ocurre con una oración como la siguiente: "La mitad de un número aumentado en 4 unidades". Los alumnos deberán reparar en el género de la palabra "aumentado" para distinguir que no se trata de sumar 4 a la mitad del número –puesto que en tal caso debería decir "aumentada"–. ¿Cuál es la potencia de este trabajo? ¿Qué desafío intelectual supone para los alumnos? ¿De qué manera se los está convocando a producir conocimiento matemático?

Por otro lado, pensemos en una expresión como $2x + 1 = 7$. ¿Cuál sería su traducción al lenguaje coloquial, considerando que x representa un número entero? En principio, podríamos pensar en varias –aunque podríamos pensar en muchas otras, considerando situaciones en distintos contextos intra o extramatemáticos–:

- El doble de un número aumentado en 1 es 7.
- El siguiente de un número par es 7.
- El siguiente del doble de un número es 7.
- Un número impar es 7.

Como decíamos en un apartado anterior, se pide la traducción como si esta fuera única, cuando los profesores sabemos que no es así. Como vemos, las propuestas de traducción de un lenguaje a otro suelen estar atravesadas por muchos supuestos e implícitos que, no solo son vividos como arbitrarios, poco significativos o incluso "tramposos", sino que en muchos casos comunican ideas matemáticamente incorrectas a los alumnos.

Somos conscientes de que muchos de los docentes que proponen estos ejercicios tienen en la mira un tránsito suave entre lo conocido y lo nuevo. De este modo, intentan simplificar las actividades, evitar las complejidades que supone el inicio del estudio de esta nueva zona de la matemática que involucra numerosas rupturas respecto del trabajo aritmético. Pero en este intento hay importantes pérdidas, especialmente en torno a la posibilidad de que los alumnos se involucren en verdaderos desafíos intelectuales y así sentirse convocados a producir conocimiento.

BALANZAS Y ETIQUETAS

Todos los aspectos que hemos analizado hasta aquí han sido intentos de la enseñanza para facilitar la entrada al estudio del complejo universo algebraico. Si bien nuestro recorrido no intenta ser exhaustivo, no queremos dejar de señalar otras dos propuestas que han perseguido el mismo objetivo que las anteriores: la interpretación de las ecuaciones como "balanzas" y el uso de letras como "etiquetas".

Ciertos intentos de "concretizar" la noción de ecuación y su manipulación apuntan a concebirla como una balanza con dos platillos que deben mantenerse en equilibrio. Se trata de realizar "acciones" –operaciones– para averiguar el peso desconocido de una cierta caja, agregando o quitando pesas de ambos lados.

Este modelo puede resultar útil y accesible para tratar con cierto tipo de ecuaciones. Por ejemplo, en el caso de $5x + 7 = 3x + 11$, "pasar" $3x$ al miembro derecho y 7 al izquierdo puede pensarse como acciones sobre objetos concretos –cajas, pesas– que pasan de un "platillo" a otro. Un asunto sobre el que no profundizaremos pero que es necesario señalar es el siguiente: para mantenerse en el terreno de las cantidades positivas –para las que tiene sentido el modelo de balanza–, los alumnos deberán anticipar el "platillo" al que deben pasar las pesas o cajas; es decir, si decidieran transformar la ecuación de esta manera: $7 - 11 = 3x - 5x$, el contexto puede convertirse en obstáculo más que en apoyo.

En relación con esta cuestión, algunas propuestas incluyen formas posibles de representar pesos "negativos". Por ejemplo, considerando que, además de cajas y pesas, se agregan globos de helio –que "tiran para arriba", contraponiéndose al peso, que "tira para abajo" –. Es un intento ingenioso de ampliar las posibilidades de utilización de este modelo; en un ejemplo como el que proponíamos más arriba, la ecuación transformada podría abordarse con estas nuevas consideraciones. Sin embargo, resulta curioso que de una situación inicial $5x + 7 = 3x + 11$ en la que solo hay cajas y pesas se pase a una segunda situación $7 - 11 = 3x - 5x$, que involucra, ahora, unos globos de helio que no estaban en el inicio, por el solo hecho de cambiar los objetos de un platillo a otro. Incluso, si se pasara en el otro sentido, esto no sucedería. Desde el punto de vista de los alumnos, toda esta manera de pensar la ecuación resulta arbitraria y difícil de seguir. Muchos de ellos prefieren que se les enseñen pasos mecánicos, descontextualizados, para evitar toda esta arbitrariedad.

Resulta interesante, además, analizar cuál es la idea de fondo en este modo de pensar las ecuaciones. Dado que se trataría de una situación en la que hay que averiguar el peso desconocido de una cierta caja, se da por sentado que ese peso existe y es uno solo, que no se conoce. La noción detrás de esta idea es la de ecuación como "igualdad numérica con número a develar" (Panizza, Sadovsky, Sessa, 1997). Pero pensemos que una ecuación es una función proposicional, lo cual significa que es una expresión que puede tomar dos valores de verdad –verdadero o falso–, dependiendo de los valores particulares de la variable x que se considere. Por ejemplo, $2x + 1 = 25$ será verdadera para $x = 12$ y será falsa para todos los demás valores; pero $5x + 3 = 5x + 8$ será falsa para todo valor de x.

Ciertas investigaciones didácticas han encontrado que la noción de ecuación como igualdad con incógnita –la que más circula en los inicios del álgebra escolar– puede actuar como obstáculo aun en el caso de alumnos que tienen "éxito" en aquellas actividades que la escuela suele enseñar. Por ejemplo, frente a ecuaciones sin solución, muchos alumnos se desorientan y consideran que no se trata de una ecuación aunque al principio parecía que sí lo era. En otros casos, frente a una ecuación con dos variables, los alumnos "completan" lo que consideran debería ser un sistema de ecuaciones, agregando otra ecuación cualquiera, en lugar de establecer el conjunto de pares que cumplen la condición. La idea de igualdad numérica se opone en cierto sentido a la de ecuación como restricción sobre un dominio –que implica la noción de variable–. Así, una expresión como $P = 4x$ para representar la relación entre el lado x de un cuadrado y su perímetro P, al ser estudiada solo en términos de cálculo, invisibiliza las ideas de variación y dependencia.

Una segunda cuestión que quisiéramos analizar en este apartado tiene que ver con el uso de letras. Los alumnos que han transitado la escuela primaria han tenido oportunidad de utilizarlas en ciertas actividades específicas. Por ejemplo, es muy posible que hayan usado una expresión como 30 *m* para aludir a “treinta metros”. Aquí la letra m tiene un significado muy claro en el contexto de las medidas, y en este contexto la expresión 20 m + 10 m = 30 m tiene sentido y es aceptada por los alumnos. Esto también ocurre cuando la letra actúa como abreviatura de algún objeto al que refiere, por ejemplo si 30 m fuera una manera de representar la idea “treinta manzanas”. En estos casos, las letras se usan como “etiquetas” (Barallobres, 2000) y operar aquí puede resultarles a los alumnos relativamente sencillo. Esto puede deberse a que la letra conserva la referencia al contexto, hecho que permite a los estudiantes apoyarse en él para dotar de sentido a las operaciones.

Pero con el ingreso al estudio del álgebra, las letras se utilizarán con varios sentidos diferentes. Uno de los más usuales es el de incógnita, es decir, un número desconocido que hay que averiguar. Este sentido aparece fuertemente asociado a la resolución de ecuaciones que, junto con la traducción del lenguaje algebraico al coloquial (y viceversa), constituye una de las actividades que con más frecuencia se propone desde la enseñanza. Las letras también se utilizan para denotar variables, valores posibles de una cierta cantidad. Este sentido aparece asociado al estudio de funciones. Además, las letras pueden representar indeterminadas, es decir, valores numéricos sin determinar. Este sentido está muy presente en el estudio de expresiones algebraicas y polinomios.

Está claro que el uso de las letras está en el núcleo del trabajo matemático de la escuela secundaria, y que resulta más amplio y diverso que el trabajo que se ha podido desplegar en la escuela primaria. Pero si esta diversidad de usos y sentidos no aparece de manera explícita en las clases, puede quedar oculta a los ojos de muchos alumnos que permanecerán atrapados en la idea de "etiqueta".

Muchos profesores, con el objetivo de acercar las nuevas prácticas a aquellas que los alumnos conocen, intentan dotar de sentido a expresiones del tipo $10x + 20x$ diciendo cosas como "es como diez manzanas más veinte manzanas, o sea, treinta manzanas". Si bien los alumnos utilizan esta analogía en el momento en el que el profesor se lo recuerda, no logran movilizarla espontáneamente. ¿Por qué –se preguntan– no pueden recuperar un sentido tan cotidiano, tan sencillo?

Creemos que es importante no perder de vista que la sencillez y la cercanía del contexto en estos casos los está aportando el profesor, cuyos conocimientos le permiten transferir un significado concreto a una expresión que, en principio, no refiere a nada en particular –y que, por otro lado, tiene pretensiones de generalidad–. Nuevamente, desde el punto de vista de quien aprende, no se atrapa la continuidad que se pretende dar. De este modo, la construcción de nuevos sentidos del uso de las letras queda a cargo de los alumnos.

CAPÍTULO III

EL DESAFÍO DE ARTICULAR LOS CONOCIMIENTOS DE LOS ALUMNOS CON LAS NOCIONES QUE LA ESCUELA QUIERE ENSEÑAR

La trayectoria de los alumnos que transitaron por la escuela primaria y llegan a la escuela media es sin duda muy heterogénea. Esa misma diversidad los acompaña en los nuevos desafíos, tanto a los alumnos como a los docentes.

Como ya hemos mencionado en otros capítulos, en términos generales se puede reconocer que en la escuela primaria el trabajo aritmético se encuentra fuertemente vinculado a la resolución de cálculos como medio de acceso a las respuestas a los problemas que circulan en las aulas. Estos cálculos hacen referencia a las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división, tanto con números naturales como con números racionales. Sobre los últimos años de la escolaridad primaria, en numerosas oportunidades se proponen a los alumnos situaciones que tienen que ver con el análisis de algunas propiedades que se verifican para estas operaciones, en un intento de generalizar algunas de ellas. El abordaje de este tipo de relaciones también resulta muy diverso.

De todas maneras, tanto en los diseños curriculares de la primaria como en las prácticas de algunos docentes hemos encontrado diferentes temas de trabajo que podrían ser un puente entre la práctica aritmética que se desarrolla en las aulas y la práctica algebraica que se propicia desarrollar en los colegios secundarios. Organizaremos estas cuestiones en dos asuntos que refieren al trabajo con las operaciones. En cada uno de ellos focalizaremos en algunos de los contenidos de enseñanza que se proponen en los diseños curriculares para el nivel primario así como en algunos de sus fundamentos. Nos detendremos intentando arrimar algunas cuestiones vinculadas a las relaciones entre estos contenidos y el trabajo algebraico así como en analizar en qué sentido estas cuestiones pueden resultar uno de los puntos de apoyo para los alumnos de la escuela secundaria, al inicio del trabajo con expresiones algebraicas.

Advertimos que se han considerado estos dos ejes solo a modo de recorte. Nada indica que el mismo tipo de análisis se no se pueda desarrollar con otros ejes de trabajo de la escuela primaria.

EL TRABAJO CON LAS OPERACIONES

En diferentes diseños curriculares para el nivel primario de nuestro país se hace referencia a contenidos para la enseñanza de los que extraemos estos, solo a modo de ejemplo:

- Cálculos mentales a partir del análisis de la escritura decimal de los números.
- Resolver cálculos utilizando descomposiciones de los números, cálculos conocidos y propiedades de las operaciones.

En varios de estos documentos se esgrime como argumento lo siguiente: "Las actividades de cálculo mental constituyen buenas oportunidades de considerar el cálculo como objeto de reflexión, favoreciendo la aparición y el tratamiento de relaciones y propiedades inicialmente utilizadas, y luego reconocidas y formuladas".

Si bien el trabajo central podemos ubicarlo en que los alumnos elaboren y dispongan de una variedad de recursos de cálculo asociados a las diferentes operaciones, la expectativa pone también de manifiesto un tipo de práctica que, sostenida en el trabajo aritmético, comience a poner en evidencia la posibilidad de establecer relaciones entre cálculos que, para los alumnos y a primera vista, podrían no tenerlas.

En un trabajo de indagación desarrollado por un grupo de docentes de la Provincia de Buenos Aires, con alumnos de 5.° grado, les proponen a los niños dos actividades que nos pueden servir para pensar sobre los asuntos que venimos discutiendo.[12]

1. *Decidir y fundamentar si las siguientes igualdades son verdaderas o no:*

   a. $30 \cdot 8 = 15 \cdot 16$

2. *Completar las siguientes igualdades para que sean verdaderas:*

   b. $43 + \ldots\ldots. = 44 + 50$

12. Tanto en el problema 1 como en el problema 2 hemos seleccionado uno solo de los ítems.

Este tipo de tarea pone en el centro la idea de equivalencia entre cálculos. Poder dar cuenta de dicha equivalencia requiere establecer relaciones entre ellos a raíz de los números que intervienen y de las propiedades que se verifican, en este caso, para la multiplicación y la suma. Resulta, en este sentido, una tarea novedosa para los alumnos.

Tal como nos informan diferentes investigaciones y el mismo trabajo de indagación del que hemos extraído los ejemplos, los alumnos enfrentan este tipo de situaciones a partir de una concepción sobre el signo igual (=) asociada fuertemente a la búsqueda de un resultado. Desde este sentido que le otorgan, el primer intento de resolución, en particular para el problema 1, pasa por la búsqueda del resultado de cada cálculo y, a partir de allí, decidir si resultan iguales o no. Esto le genera al docente una necesidad de "mover" a los alumnos y surgen dos posibilidades: inhibir que hagan ambas cuentas o bien invitar a los alumnos a que intenten explicar por qué ambos cálculos dan el mismo resultado si en cada uno hay números diferentes. Los docentes se inclinan por esta última opción en función de no ir en contra de lo producido por los alumnos. Frente a este pedido se desarrolla el siguiente diálogo, a partir de una escritura elaborada por los alumnos: $30 \cdot 8 = 15 \cdot 2 \cdot 8$ (en la que ya se evidencia una transformación en la escritura del cálculo que les permite a los alumnos avanzar en la explicación).

Carlos: –¡Es verdadera!

Docente: –¿Por qué?

Priscila: –A los 8 no los cuento porque son iguales y están en los dos lados.

Carlos: –Y $15 \cdot 2$ es 30, y el 30 está "acá" y del otro lado (marca con el dedo cada término, y "del otro lado" marca el cálculo $15 \cdot 2$). ¿Cómo puedo decir esto?

Docente: –¿Qué?

Carlos: –Estos lugares… estas partes.

Docente: –Se llaman términos.

Nos resulta sumamente interesante el trabajo que despliegan estos dos niños. Por un lado comienzan a tratar los cálculos como “objetos” a ser comparados, más allá del resultado que arroje cada uno. Para ello necesitan en primer lugar transformar la escritura en otra equivalente. Salvando las distancias, este tipo de práctica se puede asociar al tratamiento que admiten las expresiones algebraicas: permiten “leer” información que da cuenta de ciertas relaciones. Pero, a su vez, es posible transformar esa expresión en otra equivalente para leer información que no se podía atrapar. Vemos allí un puente, nada sencillo de transitar, pero posible. Y por otro lado comienza a ser necesario adjudicar “nombres” para ser un poco más preciso en la designación de las relaciones que se van estableciendo.

En el caso del problema 2, los alumnos enfrentan la explicación a partir de procedimientos que las autoras del trabajo de indagación refieren con el nombre de compensación. El siguiente diálogo es una muestra de ello.

Carlos: –Ves, acá al 50 le sacamos uno y queda en 49, el número que falta es 49. Queda 43 + 49 = 44 + 50.

Franco: –¡Ah!

Carlos: –¡Está mal! porque tiene que dar lo mismo en los dos términos.

Docente: –¿Hiciste la cuenta, para saber que no da lo mismo?

Franco: –¿No se puede hacer cuentas?

Carlos: –¡No! (responde al docente). Los números en cada término son distintos, no da lo mismo. Mirá, seño, 43 + 49 es distinto de 44 + 50. Porque a 49 si le saco 1 para dárselo a 43 y se forma el 44 y el 49 queda en 48 y no es 50 como está en este término.

Docente: –Lo están pensando bien, muy bien, pero entonces parece que no es 49. Sigan intentando.

Franco: –Es 51, a este le sobra uno para que se lo pase a este (43).

Carlos: –¡Claro! ¡Ahora sí! ¡Seño! Ya está, es 51.

Docente: –¿51? Me explican por qué creen que es ese número, 51.

Franco: –A 50 le sumo 1 y queda en 51, a 51 le saco 1 y se lo sumo al 43 y da 44.

Una vez más los alumnos tratan a los cálculos en términos de relaciones entre expresiones. El juego de "compensaciones" resulta un recurso potente para estos niños a la hora de comparar dos cálculos. A su vez es posible reconocer que Carlos "entró en el juego", cuando enfáticamente sostiene que no se puede hacer la cuenta.

En buena medida, este tipo de trabajo, apoyado en los números y las operaciones que los alumnos conocen, pone en escena un tratamiento relacional de los cálculos que permite "centrar la atención en las propiedades de las operaciones, en cómo transformar expresiones y operaciones, y cómo esta transformación afecta a las operaciones" (Castro-Molina, 2002). Podemos agregar que, al mismo tiempo que los alumnos recorren o producen un camino intentando dar una respuesta, van construyendo en esa marcha los argumentos que validan dicha respuesta a partir de las relaciones a las que van apelando, tal como explicita Carlos.

El trabajo de las maestras de la Provincia de Buenos Aires, por otra parte, hace referencia a un tipo de tratamiento que los alumnos hacen de los cálculos al que denominan *mixto*. Es decir, los alumnos, en algunos casos, tratan a los cálculos desde recursos exclusivamente aritméticos, solo a partir de los resultados. En otros casos, tratan a los cálculos solo a partir de las propiedades (por ejemplo, apelan a la propiedad conmutativa para decidir la igualdad entre $123 \cdot 45$ y $45 \cdot 123$), a los que las autoras denominan algebraicos. Pero en la mayoría de los casos, los alumnos tratan a los cálculos con recursos *mixtos*: buscan algunos resultados parciales, usan propiedades, comparan, compensan, etc. Interpretamos que este tipo de tratamiento forma parte del puente entre el trabajo aritmético y el trabajo algebraico, tratamiento al que en la escuela media se puede recurrir como soporte para el trabajo con expresiones algebraicas y ecuaciones.

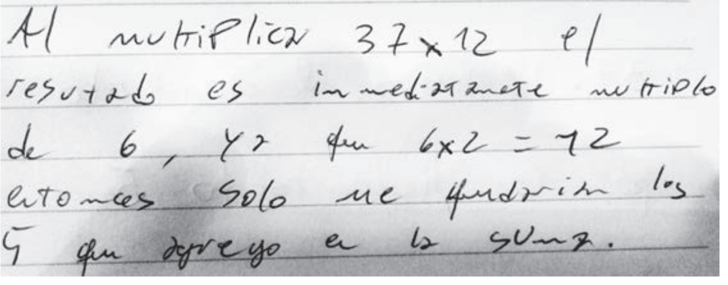
Otro de los contenidos que aparecen en algunos de los diseños curriculares de nivel primario sentencian lo siguiente:

- Análisis de la información que porta una expresión aritmética para decidir si un número es múltiplo o divisor de otro, sin necesidad de hacer cálculos.

Con la intención de abordar este contenido, un docente de una escuela primaria de CABA propone a sus alumnos de 7.° grado (que sería el primer año de la secundaria en otras jurisdicciones cuyas primarias van de 1.° a 6.°) el siguiente problema:

Decidan si es verdadero o falso que si al número 37 x 12 + 5 lo dividimos por 6 el resto que se obtiene es 5.

Una vez más, muchos alumnos recurren a resolver el cálculo y efectuar la división, obteniendo efectivamente 5 como resto. En cambio, otros alumnos apelan a transformar el cálculo en otro que permite interpretar la relación en términos de múltiplos:


Al mutiplicar 37x12 el resutado es inmediatamente mutiplo de 6, ya que 6x2 = 12 entonces solo me quedarian los 5 que agrego a la suma.

(Al multiplicar 37 x 12 el resultado es inmediatamente múltiplo de 6, ya que 6 x 2 = 12. Entonces solo me quedarían los 5 que agrego a la suma).

Si bien los argumentos y las escrituras no resultan próximos a los que la matemática habilita, también es parte del recorrido tratar con los modos de comunicar y representar las relaciones que se establecen y sus explicaciones. Allí también hay un puente posible.

Un último aspecto a destacar se refiere al posicionamiento al que arriban algunos alumnos a partir de este tipo de tratamiento. Como dice en este caso Camilo (el autor de la producción anterior): “podés saberlo sin hacer las cuentas”. Creemos que este tipo de expresión da cuenta de un modo de hacer diferente al que venían desarrollando: ya no se trata de saber un resultado, sino de acceder a la respuesta a partir de las relaciones aritméticas que se van estableciendo. Vale la pena advertir que si bien estas relaciones pueden tener carácter local, un asunto que aparece como “general” se refiere al tipo de práctica que se despliega; la misma frase “podés saberlo sin hacer las cuentas” es en sí misma un principio de generalización, del mismo modo que en los ejemplos anteriores la idea de comparar cálculos o la transformación de un cálculo en otro equivalente.

EL ESTUDIO DE LA RELACIÓN ENTRE DIVIDENDO, DIVISOR, COCIENTE Y RESTO DE UNA DIVISIÓN ENTRE NÚMEROS NATURALES

Desde segundo o tercer grado de la escuela primaria los alumnos se enfrentan a diferentes problemas que se pueden asociar al concepto de división. La trayectoria que se propone es de largo “aliento” e incluye varios años de la escolaridad. Pero al recorrer los contenidos de fines de la educación primaria o de inicios de la escuela secundaria, esbozados en diferentes diseños curriculares, es posible identificar algunos lineamientos que proponen avanzar en el estudio de este concepto ya no en términos de “una de las cuatro operaciones”, sino como objeto en sí mismo, es decir, profundizar en las relaciones que se pueden establecer entre los valores que pueden adquirir los números que intervienen en una cuenta de dividir. De allí que se proponga como uno de los contenidos de enseñanza el siguiente.

- Resolver problemas que implican analizar las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto y considerar la cantidad de soluciones posibles en función de los datos.

En algunos de dichos documentos se sostiene que en 6.° y 7.° grado (o 1.° año) la división debe seguir siendo objeto de trabajo, pero ahora se trata de estudiar el comportamiento de la expresión $D = d \cdot c + r$ (con $0 \leq d < r$), las relaciones que se pueden establecer, analizar y anticipar resultados, etcétera.

Encontramos diferentes ejemplos de actividades que se sugieren. Entre ellos nos interesa detenernos en un problema que plantea lo siguiente:

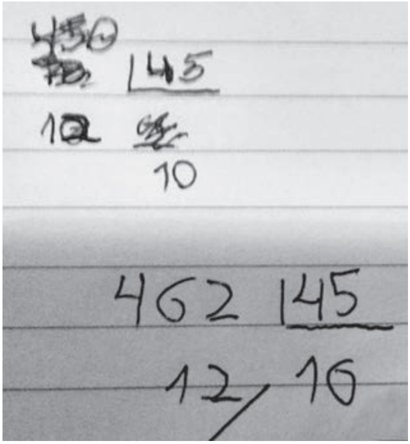
Proponer una cuenta de dividir en la que el divisor sea 45 y el resto sea 12. ¿Hay una sola? ¿Cuántas hay? ¿Por qué?[13]

Dos asuntos resultan centrales destacar al pensar sobre este problema. En primer lugar, la idea de que quien resuelve la situación puede atribuir valores arbitrarios al cociente y considerar que estos valores son independientes del divisor y el resto. Es decir, quien domina la relación entre las cantidades puede anticipar que el valor del cociente es independiente, que dicho valor se multiplica por 45, al resultado se le suma 12 y se obtiene el dividendo. No hay ningún condicionante para el cociente más que ser un número natural, ya que se trata de una división entera. Y que son infinitos los candidatos posibles.

En este mismo movimiento se pone en funcionamiento la idea de variable: al ser el cociente un valor independiente, el resultado al que se arriba para el dividendo dependerá del cociente elegido. Y, en este sentido, este tipo de relaciones también puede resultar un punto de encuentro entre las operaciones aritméticas y el trabajo con expresiones algebraicas, en particular, aquellas que abonan al tratamiento de las ecuaciones.

Veamos algunos extractos de interacciones entre alumnos y maestros alrededor de este problema. Un alumno de 7.° grado escribe en una hoja de su carpeta lo siguiente:

13. Extraído del Documento de Actualización para 7.° grado (2001).



El docente se aproxima y se entabla el siguiente diálogo:

D: –Simón, contame lo que hiciste.

S: ……eh, no, puse acá un diez.

D: –No, no, contame desde el principio, qué escribiste cuando terminamos de leer el problema y entendimos, que veo que acá probaste algo, tachaste, está bueno eso pero no entiendo, así entiendo qué estás pensando, ¿sí?

S: –Ahhh.. sí, puse como la cuenta, acá el cuarenta y cinco y acá puse noventa…

D: –Ya entiendo, hiciste como si fueras a hacer la cuenta, dividido cuarenta y cinco y el noventa. ¿Y el noventa de dónde lo sacaste? ¿Cómo se te ocurrió poner el noventa?

S: –No, en realidad primero puse noventa acá (señala el lugar del dividendo) pero ya sabía que daba dos, y no sobraban doce, pero si ponía diez quedaba más cerca ahí cuatrocientos cincuenta, y era más fácil por cuarenta y cinco…

D: –Pará, pará que me perdí, ponés dos, sabés que llegás al noventa, ¿pero de dónde sabés que llegás al noventa?

S: –Dos por cuarenta y cinco, es el doble, noventa, falta, es más que dos, es diez, me mandé directo con diez.

D: –¡Ah!, en lugar de dos probás con diez, y allí en vez de noventa llegás a cuatrocientos cincuenta.

S: –Sí, es fácil, le agregué un cero y da cuatrocientos cincuenta, como sobran doce hago los cuatrocientos cincuenta más los doce.

D: –Esos que sobran los agregás a los cuatrocientos cincuenta, pero ¿por qué?

S: –Para que me sobren…

En este intercambio se hacen presentes algunas cuestiones que nos resultan interesantes compartir. En primer lugar se puede identificar que el alumno comienza su trabajo apelando a la organización de la cuenta de dividir, asunto que probablemente le resulte un poco más “familiar”. Y a partir de allí realiza un primer ensayo: ubica el 90 en el lugar del dividendo –ya que dispone del doble de 45–. Es esperable que varios alumnos apelen a la búsqueda azarosa de valores para el dividendo, y, como hace Simón, vayan ajustándolo, aproximando hasta alcanzar un resto de 12. Pero Simón dispone también de la relación D = d x c + r, y dicha relación le permite comenzar a controlar dividendo y resto, apoyándose en cálculos conocidos.

Un asunto a destacar es que en este problema la solución no es un número, sino que resulta ser un “par ordenado”, aunque no sea llamado así, es decir, un cociente y un dividendo. Es esperable también que los alumnos arriben a diferentes soluciones. El docente podrá ayudar a identificar esta cuestión ubicando los resultados que obtengan los alumnos en una tabla como la siguiente, preservando, si es viable, un cierto orden.

Cociente	Dividendo
0	12
1	57
2	102
3	147
4	192
5	237

Dos cuestiones novedosas permitirían discutir la presencia de la tabla: por un lado, la cantidad de soluciones, las restricciones y condiciones que se presentan, o sea, la posibilidad de que el cociente adquiera cualquier valor natural mayor o igual que 0 y a partir de allí la obtención de los dividendos, es decir, las explicitaciones de los "pares ordenados". En este sentido se podrá analizar que, a medida que cambia el valor del cociente, cambia el valor del dividendo, colaborando de esta manera en aproximar una idea relacionada con la variación. Por otro lado, sería también interesante proponer a los alumnos el análisis de una cierta curiosidad que aflora: todos los dividendos terminan en 2 o en 7, ¿esto será casualidad o podremos explicarlo? Creemos que resulta una pregunta posible para compartir en el aula en función de involucrar a los alumnos en la idea de que esta regularidad admite razones que la justifiquen.

Al finalizar este recorrido, el docente podría proponer dos nuevos desafíos que, en cierta medida, colaboran en el trabajo de entrada a las ecuaciones:

a. ¿Será posible escribir todas las soluciones de este problema?

b. ¿Qué número sería conveniente ubicar en el cociente para que el dividendo sea 912? Traten de resolverlo sin hacer la cuenta de dividir.

La pregunta *a* va en la dirección de analizar la posibilidad de encontrar alguna expresión que pueda dar cuenta de las infinitas soluciones. En este sentido es muy probable que el docente deba ayudar a los alumnos en esta cuestión, habilitando escrituras menos convencionales, poco formales, como por ejemplo:

- Cociente por 45 más 12 debe ser dividendo.
- $C \cdot 45 + 12 = D$.
- $D = 45 \cdot c + 12$.
- Etcétera.

Creemos que la pregunta *b* y su condición habilita el trabajo más técnico de resolución de una ecuación lineal. Se trata de resolver $c \cdot 45 + 12 = 912$. Tanto apoyándose en la expresión como en la cuenta de dividir, es posible analizar con los alumnos que se trata de encontrar un número que multiplicado por 45 nos permita obtener 900, y que "sobren" 12. En este sentido, la expresión $c \cdot 45 + 12 = 912$ resulta entonces equivalente a $c \cdot 45 = 900$, de donde se podrá concluir que c debe valer 20.

Este debate permitiría analizar que la expresión $c \cdot 45 + 12 = D$ admite infinitas soluciones, pero que si se condiciona a que D valga 912, pasa a ser una de las que probablemente hubiera aparecido en la tabla de la página anterior.

Como último asunto se podrá proponer a los alumnos que intenten encontrar el valor de c que verifique que $c \cdot 45 + 12 = 915$. La idea que se promueve ahora es que no hay ningún *número natural* que cumpla estas condiciones, en función de las relaciones que resultan válidas para la división entera. En este caso no hay solución. El docente podrá proponer a los alumnos la búsqueda de algún valor de c, que no sea entero, si le resulta pertinente.

CAPÍTULO IV

RELACIONES ENTRE ALGUNOS SENTIDOS Y ALGUNAS TÉCNICAS

En este capítulo reflexionaremos acerca de algunas formas de pensar la enseñanza de las ecuaciones que incluyan no solo una idea acerca del concepto de ecuación, sino también sobre algunas técnicas de resolución.

Como hemos desarrollado en capítulos anteriores, la enseñanza usual muchas veces se basa en el uso de reglas para resolver ecuaciones. Al respecto, J. Houdebine (1991) señala:

> "En situaciones particulares, para el alumno se trata de tener respuestas que solo demanden de una movilización mínima de conocimientos. Estas respuestas no están impuestas a priori por el exterior, sino que parecen pertinentes para el que las emplea para resolver el problema propuesto. Responden a un 'principio de economía' que subyace a toda actividad humana. Podemos decir que la acción es prácticamente imposible frente a una situación o un problema si no se posee de una cantidad suficiente de reglas de acción".

Si bien acordamos con la necesidad de que los alumnos construyan reglas de acción, nos preguntamos cómo lograr un aprendizaje referido a ecuaciones que además dote de sentido al objeto matemático.

ACERCA DE LA NOCIÓN DE ECUACIÓN

En los últimos años de la escuela primaria y los primeros de la escuela secundaria se suelen presentar ecuaciones a los alumnos, definiéndolas como "una igualdad con una incógnita". También se suele trabajar sobre su resolución, ya sea despejando –pasando de términos– o aplicando la propiedad uniforme. Lo cierto es que la mayoría despeja, ya que el uso de la propiedad uniforme carece de sentido a los ojos de los alumnos y, para ellos, "es lo mismo que despejar pero escribiendo más".

Una primera cuestión sobre la que queremos reflexionar es la definición de ecuación. La idea de igualdad con una incógnita resulta discutible. Esto se debe a que la idea de igualdad está relacionada con el valor de verdad de una proposición: afirmar que dos números o expresiones son iguales equivale a afirmar que es *verdad* que lo son. Por ejemplo, no es posible afirmar que $4x - 2 = 6$ sea una igualdad si no se conoce el valor de x. De hecho, solo se transforma en una igualdad verdadera para $x = 2$, mientras que para cualquier otro valor será una igualdad falsa. Por otro lado, esta manera de considerar a las ecuaciones no parece adaptarse al caso de ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones.

Entonces, una ecuación puede definirse como una función proposicional: al reemplazar sus variables por números se transforma en una proposición que puede ser verdadera o falsa. El conjunto de valores para los cuales es verdadera constituye su conjunto solución.

La resolución de una ecuación podrá hacerse interpretando las expresiones que intervienen o utilizando reglas de transformación válidas.

En los capítulos anteriores hemos presentado algunos problemas que ponen a los alumnos a reflexionar acerca de la función de las letras, a analizar la dependencia entre variables, a lidiar con problemas que admiten más de una solución.

En este capítulo profundizaremos en la noción de ecuación y propondremos algunos problemas que permiten desarrollar técnicas para resolverlas.

LAS ECUACIONES. ENTRE EL SENTIDO Y LA TÉCNICA

La progresión de la enseñanza de las ecuaciones que más persiste en las escuelas consiste en iniciar con ecuaciones lineales para luego avanzar con cuadráticas. Luego, en años superiores, se propone trabajar con ecuaciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Se trata de una mirada que va de lo más simple a lo más complejo.

El tipo de tarea que se propone es en general de manipulación de expresiones algebraicas. La sustitución de valores de la variable se considera solamente una “prueba” de la solución, que la mayoría no considera necesaria. Siempre se la usa después de resolver la ecuación y raramente antes. El riesgo que genera este tipo de enseñanza es que los conocimientos de los alumnos se reduzcan a un listado de reglas sin ninguna relación entre sí.

Creemos que la secuenciación habitual no necesariamente permite a los alumnos construir una concepción de ecuación como la que describimos anteriormente y las técnicas de resolución asociadas.

Podría iniciarse el trabajo en torno a las ecuaciones a través de un conjunto de problemas que aborden la noción de ecuación y su conjunto solución. Los siguientes constituyen ejemplos de estos:

1) *Dada la expresión $2x + 1 = 3x - 2$, ¿para cuáles de los siguientes valores de x se convierte en una igualdad verdadera y para cuáles en una falsa?*

   $x = 1$ $\qquad$ $x = 2$ $\qquad$ $x = 3$

2) *Sean $A = x(x - 1) - 5(x^2 + 2)$ y $B = -x^2 - 3x(x + 1)$.*

   a) *Hallen los valores de A y B para $x = 5$.*

   b) *¿Creen que $A = B$? Justifiquen su respuesta.*

3) *Decidan si los siguientes valores de x son solución de la ecuación $3x^3 - 2x^2 - 5x + 2 = x^4 + 1$:*

   $x = 0$ $\qquad$ $x = 1$ $\qquad$ $x = -1$ $\qquad$ $x = -2$

4) *Inventen tres ecuaciones que tengan a $x = 5$ como solución.*

El problema 1) pone en escena que expresiones como las anteriores pueden convertirse en igualdades verdaderas o falsas según el valor que se le asigne a la variable. Seguramente el docente tenga que hacer aclaraciones respecto del enunciado. Será también una buena ocasión para acordar qué significa que una igualdad sea verdadera o falsa.

El problema 2) pone de relieve la igualdad entre expresiones.[14] Las expresiones A y B son diferentes, pero A(5) = B(5), por lo que es esperable que una cantidad considerable de alumnos responda que A = B. De esta manera, el problema pone de relieve el estatuto de igualdad entre dos expresiones, que no alcanza con que sean iguales para un valor de la variable, sino que tienen que ser iguales para todos sus posibles valores.

El problema 3) avanza sobre la idea de solución de una ecuación. El tipo de ecuación propuesta, que no puede ser resuelta a través de despejes, lleva a tener que poner en juego otro tipo de estrategia. Los alumnos son llevados a la necesidad de evaluar cada uno de los miembros de la ecuación para los valores de x dados. De esta manera es posible poner el foco sobre el significado de la solución de una ecuación sin vincularlo con un mecanismo de resolución.

El problema 4) plantea la situación inversa a la anterior. Es decir, será necesario armar dos expresiones que sean iguales para x = 5. Es interesante notar que en este momento no nos preocupa si x = 5 es la única solución, sino que lo sea. El pedir tres ecuaciones diferentes tiene por finalidad que los estudiantes tengan que buscar expresiones más complejas.

UNA CLASIFICACIÓN DIDÁCTICA DE LAS ECUACIONES

Con el objetivo de pensar en un dominio creciente de la técnica de resolución de ecuaciones por parte de los alumnos, proponemos una clasificación de origen didáctico que nos permitirá reflexionar sobre su enseñanza.

Llamaremos *ecuaciones aritméticas* a aquellas que responden al tipo $f(x) = k$, donde $f(x)$ es una función y k es un número real. La función f tiene que ser tal que la expresión $f(x) = k$ pueda ser

14. Idea tomada de Kouki, R. (2006).

interpretada por los alumnos como un cálculo del que el valor *k* es su resultado.

Considerar ecuaciones de este tipo como el punto de partida para debatir acerca de técnicas de resolución permite posicionarse en un marco aritmético donde la tarea consiste en "desarmar" cálculos. Por ejemplo, la ecuación 3x – 1 = 7 puede interpretarse de la siguiente manera: se busca un número (3x) tal que al restarle 1 se obtiene 7, por lo que 3x tiene que valer 8, para lo cual x tiene que ser igual a $\frac{8}{3}$. De aquí surge el siguiente conjunto de ecuaciones:

Ecuación	**Interpretación**
3x – 1 = 7	Busca un número (3x) tal que al restarle 1 se obtiene 7.
3x = 8	El triple de un número es 8.
x = $\frac{8}{3}$	El número es $\frac{8}{3}$

Si bien la traducción de una expresión al lenguaje coloquial no es única, en este caso resulta una herramienta interesante para vincular dos registros.

La interpretación aritmética de cada paso en la resolución permite relacionar las diferentes ecuaciones como aquellas que son satisfechas por los mismos valores de la variable, es decir que son equivalentes. Esta relación, que no es explícita para los alumnos, está dotada de sentido por los pasos para encontrar el número.

Asimismo, es posible analizar cuáles fueron las transformaciones realizadas en cada caso. Seguramente esta será una tarea que quede a cargo del docente, quien podrá proponer escrituras algebraicas para procesos aritméticos con el objetivo de analizarlas.

Un posible grupo de ecuaciones aritméticas está constituido por aquellas del tipo:

$$x + a = b$$

$$ax = b, \text{con } a \neq 0$$

$$\frac{x}{a} = b, \text{con } a \neq 0$$

$$\frac{a}{x} = b$$

$$x^n = b$$

$$(x + a)(x + b) = 0$$

Resulta claro que la mirada acerca de este objeto será parcial si solo se consideran ecuaciones de este tipo. Sin embargo, teniendo en cuenta que los alumnos están realizando una transición entre la aritmética y el álgebra, creemos que un trabajo que se apoye en lo aritmético puede servir como base para pensar lo algebraico. Por supuesto, será necesario marcar sus límites y ampliar la mirada hacia cuestiones cada vez menos aritméticas y más del campo del álgebra.

ECUACIONES QUE DERIVAN DE ax = b

Este conjunto de ecuaciones, que pueden resolverse a partir de la relación entre la multiplicación y la división, constituye un buen punto de partida. En algunos casos será necesario hacer un trabajo previo con ecuaciones del tipo x + a = b, mientras que en otros podrá iniciarse el trabajo con estructuras multiplicativas.

Proponemos algunas actividades para analizar.

1) *Resolvé las siguientes ecuaciones:*

a) $4x = 152$ $\qquad \frac{x}{18} = 15$ $\qquad \frac{1.512}{x} = 36$

Es importante señalar que no esperamos que las ecuaciones sean resueltas a través de despejes ni del uso de la propiedad uniforme. Suponemos que, para 4x = 152, los alumnos podrán analizar que si el producto entre 4 y un número es 152, entonces el número buscado es 152 / 4 = 38. Se trata de una relación que ha sido objeto de enseñanza de la escuela primaria, junto a la idea de que a partir de un producto es posible derivar dos divisiones.

Las dos ecuaciones que siguen son un poco más complejas, en el sentido en que ponen en juego la propiedad recién enunciada en el sentido inverso: un cociente permite saber el resultado de una multiplicación.

Luego, si $\frac{x}{18} = 15$ entonces $x = 18 \cdot 15$. Probablemente algunos alumnos necesiten representar la ecuación en la forma de un cálculo de división para luego usar la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto. Se agrega en este caso la necesidad de interpretar que el resto de la división es cero. La siguiente resolución de la ecuación c) muestra esta estrategia:

$$\begin{array}{l|l} 1512 & x \\ \hline 0 & 36 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & c \end{array}$$

$$1512 = x \cdot 36 + 0$$
$$1512 = x \cdot 36$$
$$x \cdot 36 = 1512$$
$$x = 1512 \div 36$$
$$x = 42$$

Todas las ecuaciones propuestas derivan de la misma estructura y, luego de debatir acerca de cómo resolver cada una, es posible generalizar las estrategias puestas en juego. La siguiente actividad tiene ese objetivo.

2) *Si a es un número diferente de cero, explicá cómo hacer para resolver las siguientes ecuaciones.*

i) $ax = b$ ii) $\frac{x}{a} = b$ iii) $\frac{a}{x} = b$

A partir de lo desarrollado por los alumnos en el problema 1), es posible resolver las ecuaciones del problema 2). Seguramente este trabajo tenga que ser comandado por el docente, lo cual no constituye una dificultad debido a que será usado para sistematizar las estrategias ya puestas en juego. Por otro lado, la escritura de la resolución será un insumo de estudio para los estudiantes.

Se espera que queden registradas afirmaciones del siguiente tipo:

- A partir de una multiplicación es posible saber el resultado de dos divisiones. Por ejemplo, si $25 \cdot 32 = 800$, entonces $800 \div 25 = 32$ y $800 \div 32 = 25$.

- Para $ax = b$: si el producto entre a y x es b, entonces x tiene que ser el cociente entre b y a. Es decir, $x = \frac{b}{a}$.

- Para $\frac{x}{a} = b$: si el cociente entre x y a es b, entonces x tiene que ser el producto entre a y b. Es decir, $x = b \cdot a$.

- Para $\frac{a}{x} = b$: si el cociente entre a y x es b, entonces a tiene que ser el producto entre x y b. Es decir, $a = x \cdot b$. Entonces, $x = \frac{a}{b}$.

ECUACIONES QUE DERIVAN DE $x^N = b$

Este conjunto de ecuaciones, además de la posibilidad de interpretarse como un cálculo y su resultado, traen a escena ecuaciones con más de una solución o con ninguna.

Los siguientes problemas son un ejemplo del tipo de tarea que podría plantearse a los alumnos.

1) *Resolvé las siguientes ecuaciones.*

a) $x^2 = 16$	b) $x^3 = 8$	c) $x^4 = 81$
d) $x^5 = 0$	e) $x^3 = -125$	f) $x^2 = -36$

2) a) *¿Para qué valores de b la ecuación $x^2 = b$ tienen dos soluciones, una solución o ninguna?*

b) ¿Para qué valores de b la ecuación $x^3 = b$ tienen más de una solución, una solución o ninguna?

c) ¿Para qué valores de b la ecuación $x^4 = b$ tienen dos soluciones, una solución o ninguna?

El primero de los problemas de este bloque requiere analizar ecuaciones potenciales, con diferente cantidad de soluciones. Luego de que los alumnos hayan intentado resolverlas, el docente puede organizar una instancia de trabajo colectivo para debatir acerca de cuáles son las soluciones y cómo estar seguros de que lo son. Por otro lado, es posible reflexionar acerca de la relación entre el exponente, el resultado de la potencia y la cantidad de soluciones. Ese análisis podrá sistematizarse a partir del problema 2.

El registro de las conclusiones constituye una herramienta de estudio para los alumnos. Así, dispondrán en sus carpetas afirmaciones generales acerca de cómo resolver ecuaciones de este tipo, además de un análisis de la cantidad de soluciones que cada una puede tener y bajo qué condiciones se da cada caso.

ECUACIONES DEL TIPO (x + a)(x + b) = 0

Este conjunto de ecuaciones, así como los anteriores, también puede resolverse de manera aritmética, apelando a que para que un producto sea cero, alguno de los factores debe serlo.

Algunos de los problemas que podrían plantearse son los siguientes.

1) *Resuelvan las siguientes ecuaciones.*

a) $(x-4)(x-7)=0$ b) $(x+3)(x+5)=0$ c) $(x-1)(x+2)=0$

d) $(x-6)(x+5)(x-7)=0$ e) $x(x-8)(x+9)=0$ f) $(x+3)(x+2)=6$

g) $(x-3)(x+8)+2=2$ h) $(x^2-1)(x-2)=0$ i) $(x^2+4)(x^3-8)=0$

2) *Inventen dos ecuaciones diferentes cuyo conjunto solución sea:*

a) $S=\{3,2\}$ b) $S=\{-2,1,4\}$ c) $S=\{-3,0,2\}$

Una vez que los alumnos hayan intentado resolver la primera ecuación, el docente podrá hacer una puesta en común para socializar las formas de resolver que hubieran surgido. Si bien es posible en todos estos casos aplicar la propiedad distributiva, no resulta una estrategia válida para aquellos que no saben resolver una ecuación cuadrática dada en forma polinómica. Si bien es correcto, no es conveniente.

Las ecuaciones varían en el signo de sus soluciones para los tres primeros casos. La ecuación d) es la primera que tiene tres soluciones, cada una de las cuales corresponde a uno de los factores del primer miembro.

En el caso de la ecuación e), es la primera donde un factor es solo x, que suele traer alguna dificultad a los alumnos.

La ecuación f), a diferencia de las anteriores, no está igualada a cero, lo cual hace que no sea posible utilizar la misma estrategia. Frente a esta imposibilidad, el docente podrá dar un nuevo dato acerca de las soluciones, y es que son números enteros. Esto permite interpretar a los factores como divisores enteros de 6, que pueden listarse debido a que son una cantidad finita. En el siguiente cuadro mostramos las diferentes posibilidades:

x + 3	**x + 2**	**Valores de x**
1	6	$x = -2$ y $x = 4$
6	1	$x = 3$ y $x = 1$
–1	–6	$x = -4$ y $x = -8$
–6	–1	$x = -9$ y $x = -3$
2	3	$x = -1$ y $x = 1$
–2	–3	$x = -5$ y $x = -5$
3	2	$x = 0$ y $x = 0$
–3	–2	$x = -6$ y $x = -4$

Como x no puede tomar dos valores al mismo tiempo, es decir, no puede valer –2 y 4 simultáneamente, entonces hay dos posibilidades, cuando x = 0 o x = –5.

En el caso de la ecuación g), si bien tampoco está igualada a cero, puede hallarse una ecuación equivalente a la dada que sí lo esté. Es posible que sea necesario discutir con los alumnos que para que la suma entre (x-3)(x+8) y 2 dé 2, entonces (x-3)(x+8) tiene que valer 0.

Las ecuaciones h) e i) tienen por objetivo poner en discusión que la cantidad de soluciones no tiene por qué coincidir con la cantidad de factores.

El problema 2) plantea la situación inversa. Para armar la ecuación, los alumnos deberán poder relacionar los factores con las soluciones, es decir que cada una de las soluciones anula al menos uno de los factores cuando la ecuación está igualada a cero.

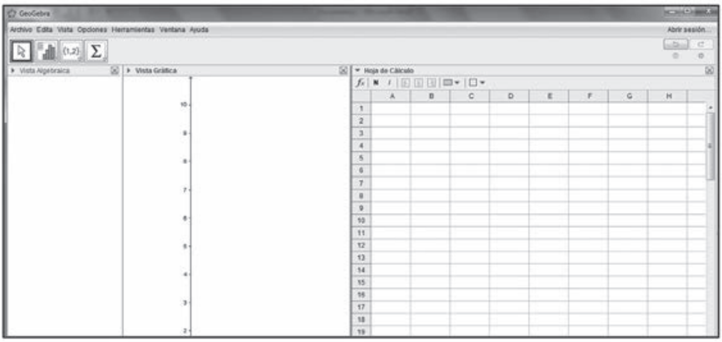
Nuestra intención en este capítulo fue la de hacer una propuesta que aborde no solo algunos sentidos de las ecuaciones, sino que al mismo tiempo avance sobre técnicas de resolución. Si bien los problemas no constituyen una secuencia de enseñanza, creemos que resultan interesantes para analizar y reflexionar acerca de la enseñanza. Queda planteado el desafío de que los alumnos dispongan de técnicas a las que hayan podido dotar de sentido.

CAPÍTULO V

ECUACIONES A PARTIR DE UNA HOJA DE CÁLCULO Y GEOGEBRA

El trabajo con GeoGebra brinda numerosos recursos que permiten abonar al tratamiento de diferentes conocimientos relacionados con la matemática: geometría, funciones, estadística, probabilidad, etc. Invitamos al lector a que explore algunas de las herramientas que provee.

En este caso particular nos detendremos en las posibilidades que brinda para tratar en el aula con la idea de variable, en un principio, recurriendo a la hoja de cálculo que allí se propone. Es decir, al abrir el programa GeoGebra, en la herramienta del menú VISTA, al desplegarla, aparece la opción hoja de cálculo. Basta con hacer clic en dicha opción para que la pantalla se vea de la siguiente forma:

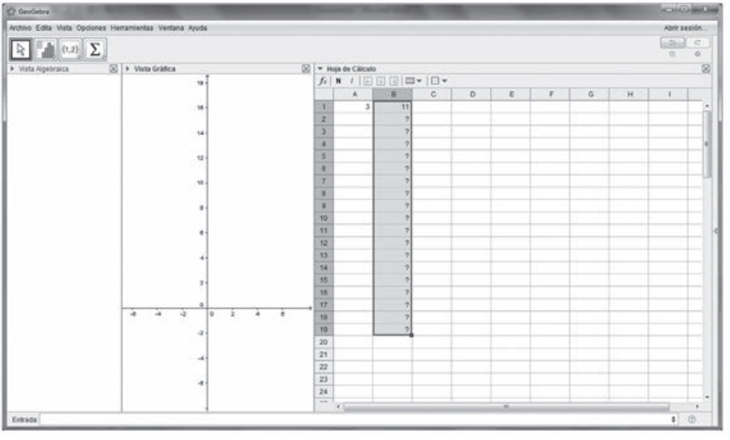


La hoja de cálculo permite organizar una colección de datos en filas y columnas pero, a su vez, habilita a establecer innumerables relaciones entre los datos ubicados en las diferentes celdas. Estas relaciones son las que permitirían comenzar a estudiar con los alumnos la idea de variable. Es decir, cada dato o valor que se introduce en una de las celdas, en función de la tarea que se proponga, exigirá considerar ese valor ya no solo como un dato fijo, sino como un dato que puede ir variando y, en consecuencia, si dicha celda está "asociada" con otra, la modificación de los valores de una de las celdas producirá la variación de otro valor de otra de las celdas. Es explícita, en este sentido, la idea de dependencia.

Supongamos entonces que, para abordar esta cuestión, les proponemos a los alumnos la siguiente actividad:

Abran el GeoGebra, mediante la VISTA que aparece en el menú habiliten la hoja de cálculo. Verán que está formada por filas y columnas. Cada celda puede identificarse por la columna en la que está y la fila a la que pertenece. Las columnas se designan con letras en tanto que las filas se las reconoce por su número. Así, por ejemplo, una celda será representada por la columna y la fila, por ejemplo D12 indica que de todas las celdas de la columna D se elige la celda de la fila 12.

*Ubiquen en la celda A1 cualquier valor, por ejemplo el 3. Ubiquen en la celda B1 la siguiente expresión: =3*A1+2 y opriman* ENTER. *Aparecerá en dicha celda un número (en nuestro caso el 11). Hagan clic con el ratón en la celda B1 de manera que quede un recuadro azulado, extiendan dicho recuadro con el ratón hasta la celda B15 o B20. La pantalla se verá similar a la siguiente:*



a) *Ubiquen diferentes valores en las celdas A2, A3, A4. Aparecerán diferentes valores en las celdas B2, B3, B4.*

b) *Si se escribe en la celda A5 el número 12. ¿Qué valor aparecerá en la celda B5? Intenten responder antes de ubicar el número.*

c) *¿Qué número habrá que poner en la celda A6 para que aparezca en la celda B6 el número 32? ¿Y para que aparezca el 7?*

Este problema tiene una doble intención. Por un lado, que los alumnos se vinculen a la hoja de cálculo del GeoGebra e indaguen algunos aspectos de su funcionamiento. Por otro lado, y en simultáneo, que comiencen a identificar que en algunas celdas es posible ubicar valores en tanto que en otras celdas aparecen valores bajo ciertas condiciones. Si bien estas condiciones forman parte del enunciado de la actividad, no es un asunto al que los alumnos le presten atención en una "primera instancia". Será parte del trabajo a desarrollar ocuparse de esta cuestión.

Muy probablemente los alumnos ensayen con diferentes valores en los ítems a) y b), solo a modo de curiosidad. De todas maneras, el ítem b) supone un cierto control, advierte sobre la posibilidad de anticiparse a la aparición del valor de la celda B5, más allá de que los alumnos se hagan cargo de este asunto. El docente podrá propiciar esta instancia a modo de desafío.

En cambio, el ítem c) involucra, ahora sí, otro tipo de tarea que va por el lado de la anticipación. Es esperable que los alumnos aproximen el resultado mediante ensayos y errores. Por ejemplo, que vayan probando con números al azar, en un inicio, y, a partir de los resultados que aparezcan en la celda B6, ajusten hasta alcanzar la respuesta. Es decir, si prueban con 8, obtienen 26, deciden entonces probar con un número más grande, por ejemplo 13, y obtienen 41. Identifican que se "pasaron" hasta que finalmente encuentran el 10.

En este momento el docente podría recuperar la fórmula que se introdujo en la celda B1. Allí la expresión resulta ser = 3*A1 + 2.[15] Es viable discutir con los alumnos, si no hubiera aparecido anteriormente, el significado que se le puede otorgar a dicha expresión, o avanzar en una escritura que dé cuenta de manera más explícita de la relación entre dos variables: B1 = 3*A1 + 2, reconociendo que A1 es independiente –admite cualquier número– en tanto que B1 dependerá del número que se le asigne a la celda A1. Se podría ir un poco más allá, analizando con los alumnos, a partir de lo realizado hasta el momento, los valores de las celdas de la columna B: si se dispusieran en orden creciente, o si en las celdas de la columna A se ubicaran los números de 1 en 1, a partir de 1 y de A1 hacia abajo, los valores que van apareciendo en la columna B van de 3 en 3. ¿Será casualidad? ¿Habrá algo en la fórmula que nos permita entender esto?

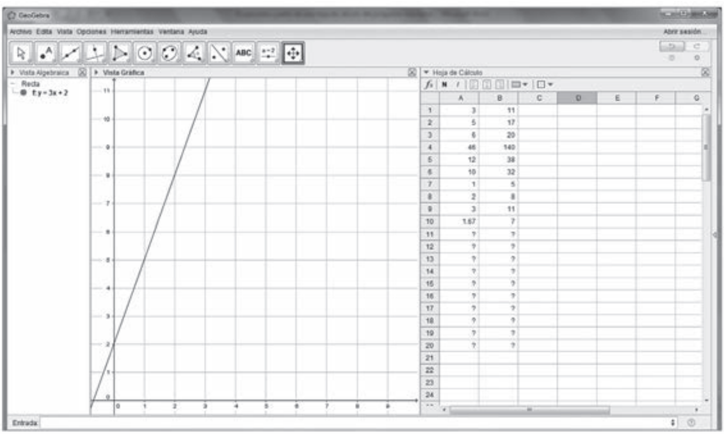
15. Según la versión que se disponga de GeoGebra, el signo igual puede no resultar necesario.

Volviendo al ítem c), el análisis previo habilitaría nuevamente a intentar tratar con la fórmula, pero ahora bajo nuevas condiciones: el valor que debe aparecer en la celda B6 es 32. ¿De qué manera es posible anticipar este resultado?, es decir, 32 deberá ser el resultado de 3*A6 + 2. Es factible identificar que para que esta expresión alcance el 32, es condición que 3*A6 sea 30, de donde se puede anticipar que A6 deberá ser 5.

Todo este recorrido permitiría al docente comenzar a identificar, junto a los alumnos, varias ideas que fueron circulando. Por un lado, la idea misma de ecuación, en tanto expresión o igualdad que relaciona celdas, o bien, variables. En algunas oportunidades hay dos variables, en otras hay una sola, ya que se determina a priori la otra. Por otro lado, la idea de dependencia e independencia, es decir, celdas que admiten cualquier número vs celdas que arrojan valores, condicionados por los que se ubiquen en las otras celdas. Finalmente se podrá identificar una primera aproximación a una técnica que colabora en anticipar resultados. Es decir, si se considera una ecuación con la forma 3*A1 + 2 = 32, uno de los modos de saber qué número es A1 se apoya en que se debe verificar que 3*A1 = 30 (así al sumarle 2 se llega a 32). En este sentido, ambas ecuaciones resultan equivalentes ya que admiten la misma solución: A1 = 10. Creemos que este tipo de trabajo colabora en la aproximación de los alumnos a la noción de ecuación y a algunas técnicas que permiten resolverlas.

Volvamos otra vez al ítem c). Allí se expresa otra pregunta: *¿Qué valor habría que ubicar en la celda A6 para que aparezca 7 en la celda B6?* Una vez más algunos alumnos podrán aproximar por ensayo y error. Pero, en este caso, la solución resulta ser una fracción, campo numérico al que los alumnos no siempre se "le animan". Pero podrían anticipar que la solución deberá estar entre 1 y 2 ya que al ubicar 1 en la celda A6 aparece 5 en la celda B6 y al escribir 2 en la celda A6, emerge 8 en la celda B6. De allí que es esperable que los alumnos interroguen sobre la posibilidad de escribir fracciones, cuestión que el docente deberá habilitar. Una vez más, el ensayo y error podrá ser un recurso, pero se podría sugerir el uso de la fórmula. En este sentido, la expresión 7 = 3*A6 + 2 puede pensarse de la misma manera que en el caso anterior, para lograr la igualdad deberá verificarse que 3*A6 = 5 (ecuación equivalente a la anterior) y de allí que en A6 deberá escribirse 5/3.[16] Una vez más, este recurso aproxima a una técnica de resolución de ecuaciones lineales que, incluso, podría generalizarse. Una aclaración indispensable: en este caso el programa transforma las fracciones en expresiones decimales automáticamente, de allí que en las celdas aparecerán números con coma.

En este punto el docente podrá sugerir una nueva actividad –que presentamos más adelante– o detenerse un instante para trabajar con otro aspecto del GeoGebra: los gráficos. Si optara por esta última, podrá sugerir a los alumnos que se visualice la vista gráfica, habilitar los ejes y la cuadrícula de manera tal de acceder a los gráficos cartesianos. Se podrá informar a los alumnos la posibilidad de escribir en la ENTRADA, al pie de la página, esa misma fórmula, aclarando que el programa admite ahora como variables otras letras: x, y, z… De esta manera, para introducir la fórmula se necesitará escribir y = 3x + 2, aclarando que y equivale a B1 así como x cumple el mismo papel que A1, obteniendo lo siguiente (la fórmula ya fue escrita en la barra de entrada y aparece en la vista algebraica, a la izquierda):

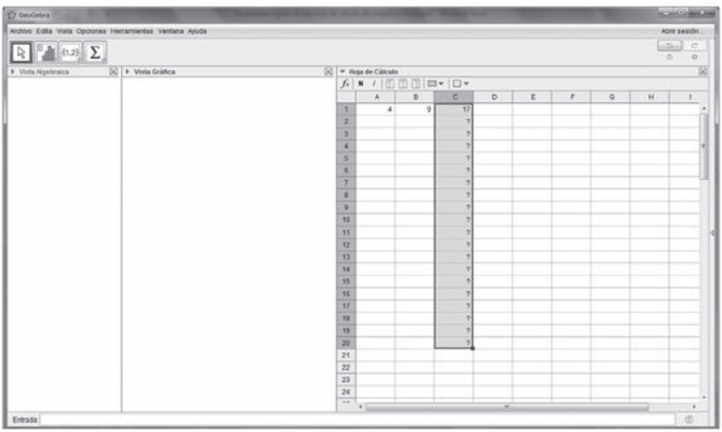


16. Vale la pena aclarar que según como se configure la hoja de cálculo, admite o no las expresiones fraccionarias -eventualmente las considera en su expresión decimal-. El docente podrá modificar la fórmula de la celda si considera que resulta conveniente que los alumnos traten en un principio con medios o cuartos.

Como se podrá observar, en una misma pantalla es posible representar la "tabla de valores", el gráfico de la función y la fórmula. A partir de este recurso será posible analizar con los alumnos las relaciones entre estos tres tipos de representación que dan cuenta de "una misma relación". Es posible, mediante los recursos geométricos, ubicar un punto en la recta, por ejemplo (3;11), ver que dicho punto se refleja en la vista gráfica e identificar que ese mismo par ordenado se presenta en la tabla.

Pasemos ahora a otra actividad, cuyo enunciado es el siguiente:

*Abran el GeoGebra y habiliten la hoja de cálculo. Introduzcan un valor cualquiera en la celda A1, por ejemplo, 4. Introduzcan otro valor cualquiera en la celda B1, por ejemplo, 9. Hagan doble clic en la celda C1 y escriban allí la siguiente expresión: =2*A1+B1 y luego opriman* ENTER. *En esta celda C1 aparecerá el número 17. Hagan clic sobre la celda C1 de manera que quede recuadrada en azul, ubiquen el ratón en el cuadradito que aparece en la parte inferior derecha de la celda y expandan el recuadro azul hacia abajo hasta la fila 15 o 20, de manera de obtener en la pantalla una vista similar a la siguiente:*



a) *Escriban diferentes valores en las celdas A2, B2; A3 y B3. Les aparecerán resultados en las celdas C2 y C3.*

b) *Escriban en la celda A4 el número 12. ¿Qué valor habrá que colocar en la celda B4 para que en la celda C4 aparezca el número 30?*

c) *Escriban el número 25 en la celda A5. ¿Qué número habrá que ubicar en la celda B5 para que aparezca el número 67 en la celda C5?*

d) *Ubiquen ahora un número en la celda A6 y otro número en la celda B6 de manera tal que en la celda C6 aparezca el número 50. ¿Habrá una única posibilidad?*

Esta actividad habilita, una vez más, a poner en debate las relaciones que se pueden establecer entre las diferentes celdas. El enunciado del problema ya implica el uso de una fórmula que depende de los valores de las celdas A1 y B1 (a diferencia de lo propuesto en la actividad 1). En este sentido podemos pensar que se trata de una ecuación con tres variables: 2 x A1 + B1 = C1. Al asignarle valores determinados a las variables A1 y B1 se obtiene el valor de C1, producto de recurrir a dicha fórmula. Es decir, A1 y B1 resultan ser variables independientes y C1 será entonces la dependiente. Parte del trabajo involucra que los estudiantes se vayan aproximando a estas cuestiones, de allí el sentido de cada ítem del problema.

La parte a) es de neto corte exploratorio, se propone el trabajo con dos filas a modo de ensayo, de un primer nivel de comprensión de la tarea y de lo que sucede con la hoja de cálculo, bajo las condiciones que se proponen. Las partes b) y c) implican una nueva condición que transforma la ecuación ahora en dos variables, ya que A4 (así como A5) resultan ser datos. Y este es un asunto a analizar con los alumnos, ya que moviliza la idea de variable, la idea de dato y la posibilidad de establecer relaciones entre ellos. En este sentido, la actividad anterior puede resultar un punto de apoyo para todo esto.

Es esperable que en una primera instancia, una vez más, los alumnos apelen al ensayo y error, ubicando en la celda B4 cualquier valor a la espera de que el número que aparezca en la celda C4 sea 30. Los números involucrados en la fórmula invitan a este ensayo. Pero luego de una o dos "arriesgadas" hemos visto a muchos alumnos que intentan comenzar a controlar los números que van ubicando en la celda B4, ajustándolo en función de la lejanía o cercanía al 30 del número que aparece en la celda C4. De esta manera es posible arribar a la respuesta, en la celda B4 deberá ir el 5 y en la celda B5 el 17.

El siguiente diálogo es parte de un intercambio con un alumno:

D: –¿Cómo hiciste para encontrar que acá va el diecisiete?

A: –Fui probando, primero puse diez y me dio sesenta, después puse veinte y me pasé, dio setenta.

D: –Ya entiendo, ¿y cómo llegaste justo al diecisiete?

A: –Probé con quince, con diecisiete y me dio.

Es claro, en esta descripción, el juego de ensayo y error al que apela este alumno, pero bajo cierto control.

En este punto el docente podrá analizar con los alumnos los ítems b) y c) proponiendo tratar con la fórmula que se escribió en la celda C1 –recuperando en este sentido la actividad anterior– y que se replica en toda la columna C. Dicha fórmula es información del mismo problema: *=2*A1+B1*. Una posible interpretación viene de la mano de los cálculos: el doble del valor de la celda A1 al que se le suma el valor de la celda B1.[17] Desde esta interpretación se puede volver a tratar con la idea de variables independientes y de variable dependiente.

Entrando en los ítems b) y c), el docente podrá propiciar un análisis a partir de la fórmula. Tomemos por caso el ítem c). El valor que se ubica en la celda A5 es 25, el valor que se quiere que aparezca en la celda C5 es 67. De allí que la expresión que atrapa las relaciones que funcionan en este caso sería la siguiente: 2 x 25 + B5 = 67. Para los alumnos es posible reconocer que dicha expresión equivale a 50 + B5 = 67. La única posibilidad es que en B5 se escriba 17. Este valor puede ser reconocido a partir de pensar en cuánto hay que sumarle a 50 para alcanzar 67, lo que resulta equivalente a pensar que B5 = 67 – 50 = 17. Esta escritura podría resultar un puente entre el valor encontrado y algunos aspectos de la técnica de resolución.

El ítem d) creemos que permite profundizar este estudio. Ahora se trata de ubicar los dos números en tanto variables, pero con una condición, que en la celda C6 el resultado que se

17. Ya se han realizado comentarios sobre posibles interpretaciones de una fórmula en capítulos anteriores.

obtenga sea 50. Una vez más la escritura de la fórmula permitiría comprender un poco más el fenómeno: 2 x A6 + B6 = 50.

A: –Metele 25 a A6, ya tenés el 50, y B6 que sea 0.

D: –¿Y será la única posibilidad?

A: –Nooo, poné 10, te da 20 y te faltan 30 para esta otra… hay muchas, ponele… ¿vale restar?

D: –¿Qué estás pensando?

A: –Si le ponés acá el 30 (señalando A6), acá tenés que poner, restarle… ehhh… 10.

Si bien no se explicita, comienza a circular la idea de que habría muchas soluciones, asunto que permitiría poner en el centro una vez más la relación entre ecuación y conjunto solución,[18] que puede haber una, varias, etcétera.

Al mismo tiempo sería posible explicitar la idea de ecuaciones equivalentes, es decir, la expresión 2 x A6 + B6 = 50 equivale a sostener que 2 x A6 = 50 – B6, que es uno de los modos en que se van generando algunas de las soluciones y, en ese sentido, resultan equivalentes, tal como pudo haberse desarrollado en la actividad 1.

El trabajo con estas fórmulas, al igual que en el caso anterior, podría completarse con el uso de las representaciones gráficas que permite GeoGebra, si el docente lo considera pertinente.

Pasemos ahora a otra actividad posible:

a) *Abran la hoja de cálculo de GeoGebra. En la celda A1 escriban cualquier número, por ejemplo 15. En la celda B1 ingresen la siguiente expresión: =3*A1 + 7 y opriman* ENTER. *Aparecerá entonces el número 52. En la celda C1 ingresen la siguiente expresión: =5*A1 - 9, en este caso aparecerá el número 66 al oprimir* ENTER. *¿Qué valor habrá que ubicar en la celda A1 para que los valores que aparezcan en las celdas B1 y C1 sean iguales?*

18. Este aspecto también ha sido explicitado en capítulos anteriores.

b) *Abran una nueva hoja de cálculo de GeoGebra. En la celda A1 escriban cualquier número, por ejemplo 5. En la celda B1 ingresen ahora la siguiente expresión: =4*A1 – 1 y opriman* ENTER. *Aparecerá entonces el número 19. En la celda C1 ingresen la siguiente expresión: = –2*A1 + 8, en este caso aparecerá el número –2 al oprimir* ENTER. *¿Qué valor habrá que ubicar en la celda A1 para que los valores que aparezcan en las celdas B1 y C1 sean iguales?*

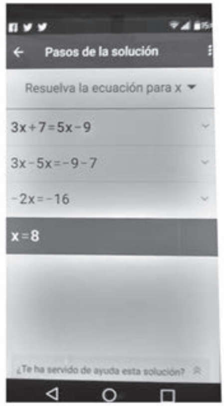
Este problema vuelve sobre asuntos ya tratados en las actividades anteriores, pero en este caso las relaciones que se ponen en funcionamiento hacen referencia a la comparación entre dos ecuaciones lineales. Cada una de ellas admite su propio conjunto solución, y se trata de identificar cuál de todos ellos es común a ambas. El ensayo y error sigue siendo un recurso posible, de todas maneras será pertinente que el docente apunte también al tratamiento vía las expresiones algebraicas.

Creemos que el tipo de trabajo habilita a hacer explícito el hecho de que, de todos los valores que se generan en cada caso, se busca uno, si es que existe, para el cual ambas valgan lo mismo. En este sentido la escritura de las fórmulas resulta un punto de apoyo posible: B1 = 3 x A1 + 7 y C1 = 5 x A1 – 9, de allí la búsqueda de un valor de la celda A1 que provoque que 3 x A1 + 7 = 5 x A1 – 9.

Una pregunta que el docente podrá formular refiere al modo de transformar esta ecuación en otra equivalente, de manera tal de preservar el conjunto solución y que aproxime a la solución. ¿Qué “maniobras” permitirían esta transformación? ¿Qué propiedades valen?

En este punto el docente podrá recuperar algunos asuntos que se pusieron en juego en las actividades 1 y 2, en cierta manera, el intento de compensación, por ejemplo, sumar 9 a ambos miembros, de manera de arribar a una expresión más sencilla: 3 x A1 + 16 = 5 x A1. Y así continuar con la resolución.

Otra opción es apelar a otros recursos tecnológicos. Existe una aplicación del celular que se denomina Photomath, su descarga es gratuita y, entre otras cosas, resuelve ecuaciones. Basta con sacarle una foto a la ecuación o bien escribirla para que la resuelva, considerando que esta aplicación reconoce como variable la letra x. La siguiente secuencia de fotos es el resultado de su uso:



En esta aplicación, una vez abierta, basta con introducir la ecuación para que inmediatamente arroje la solución. Y se puede acceder a cada uno de los pasos que desarrolla. En este sentido, disponer de los pasos permitiría intentar comprender con los alumnos el modo en que “el celular” va transformando la ecuación original en otras equivalentes, es decir que tendrán el mismo conjunto solución.

Si bien sabemos que puede resultar controversial el uso de este recurso, vale la pena recordar que en otras épocas buscábamos logaritmos usando una tabla de un libro, buscábamos valores de senos y cosenos mediante los libros que traían estos resultados, buscábamos raíces cuadradas mediante una técnica que seguramente hemos olvidado. Ahora todas estas cuestiones las resolvemos con una calculadora o una computadora. Invitamos a explorar esta aplicación con el fin de profundizar su potencialidad.

A modo de síntesis de este recorrido, creemos que esta propuesta, que incorpora algunos recursos tecnológicos, permite discutir y analizar con los alumnos diferentes cuestiones, que resultan insumos potentes para avanzar en el trabajo con ecuaciones.

Por un lado, como ya hemos mencionado, introduce la idea de variable, que puede ser considerada incluso en su versión de independiente o dependiente. Por otro lado, introduce la idea de ecuación desde diferentes perspectivas. Si bien subyace la idea de una incógnita, "las ecuaciones se convierten en igualdades verdaderas o falsas una vez que la o las variables se reemplazan por números" (Novembre, 2009).

En tercer lugar creemos, en vínculo con la idea precedente, que el tratamiento que se propicia sobre las ecuaciones colabora, bajo ciertas condiciones, en el avance en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de la noción de incógnita y el de la noción de variable, asunto que "parece ineludible para desentrañar la compleja y desafiante relación entre la aritmética y el álgebra" (Panniza, Sadovsky y Sessa, 1999).

En cuarto lugar creemos que este trabajo puede aportar a introducir otros asuntos complejos: las soluciones de una ecuación y las transformaciones en otras equivalentes –por tener la misma solución– que facilitan su interpretación así como la búsqueda de dichas soluciones.

Finalmente, estos recursos tecnológicos permiten a su vez "jugar" de manera simultánea con diferentes representaciones: la algebraica, las tablas de valores y los gráficos, dotando a la tarea de un entramado que abre la puerta a que los alumnos puedan encontrar y tratar con las relaciones que se proponen desde diferentes miradas, generando un mayor margen de acceso y de análisis.

Invitamos al lector a involucrarse con estos recursos si aún no lo ha hecho, explorando, indagando, ensayando, no solo con fenómenos lineales, sino también con otros modelos funcionales y otro tipo de ecuaciones.

PALABRAS FINALES

Este libro ha tenido como objetivo central reflexionar acerca de la enseñanza de las ecuaciones. Para ello hicimos foco sobre diferentes aspectos que consideramos centrales.

Un análisis histórico resulta interesante e importante para pensar en la enseñanza. En el caso de las ecuaciones, uno de los asuntos centrales está vinculado al origen de las escrituras algebraicas y sus antecesoras, más vinculadas a lo coloquial. Las formas de escribir no fueron siempre compartidas, lo cual implicaba una dificultad a la hora de socializar la producción. Esto mismo les sucede a los alumnos cuando producen formas personalizadas de comunicación, que muchas veces funciona como un obstáculo, aunque también puede ser un motor que lleva a buscar formas compartidas de hacerlo. ¿De qué manera es posible considerar las escrituras como un objeto de reflexión en las clases? ¿Qué tipos de actividades las ponen en juego?

Resulta también de interés didáctico encontrar trazas históricas de procedimientos ampliamente utilizados por los alumnos, como el de ensayo y ajuste. Esas estrategias, aunque no siempre eficientes, permiten "controlar" la variación de la función considerada, aportando conocimientos diferentes de los que pueden producirse al usar otras formas de resolución. La enseñanza debería, entonces, considerar estos conocimientos como base para la construcción de otros, socialmente reconocidos por la comunidad matemática. ¿Qué lugar podemos darle en la clase a las estrategias más personales, menos convencionales? ¿Cómo hacerlas evolucionar?

Otro aspecto que intentamos analizar es la enseñanza usual de las ecuaciones en la escuela secundaria. Propusimos pensar sobre la transición entre la aritmética y el álgebra, que es donde se sitúa la enseñanza de este objeto matemático. También nos preguntamos cuáles son los conocimientos de la escuela primaria que podrían funcionar como anclaje para el desarrollo de prácticas algebraicas. ¿Podemos considerar que se hace álgebra cuando se trabaja con números? ¿Qué tipo de problemas algebraicos pueden vivir en la escuela primaria y retomarse o sostenerse en la escuela secundaria?

Planteamos también la idea de necesidad, es decir, ¿podemos esperar que nuestros alumnos usen ecuaciones cuando no las necesitan, si pueden resolver los problemas que les planteamos sin usarlas? ¿Qué problemas llevan a la necesidad de usar letras? ¿Cuáles a resolver una ecuación?

Sostenemos que la enseñanza de lo algebraico, de lo cual las ecuaciones son solo una parte, abarca varios años de escolaridad. Esto se debe a la complejidad de la noción, de la idea de variable que involucra, los diferentes sentidos que adopta y las técnicas de resolución asociadas.

La tecnología juega, para nosotros, un rol central. ¿Cómo incorporarla a la clase de matemática? ¿Qué lugar tiene en el aprendizaje de las ecuaciones? ¿En qué problemas tiene sentido incluirla?

Además de todas las preguntas que dejamos planteadas, creemos que el desafío central es el de pensar en una enseñanza de lo algebraico que abarque tanto los aspectos conceptuales así como el desarrollo de técnicas y sus sentidos.

BIBLIOGRAFÍA

- Barallobres, G. (2000). *Algunos elementos de la didáctica del álgebra*, UVQ.

- Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York, Dover Publications Inc. Publicado originalmente en dos tomos en 1928 y 1929. Disponible en: https://monoskop.org/images/2/21/Cajori_Florian_A_History_of_Mathematical_Notations_2_Vols.pdf

- Cambriglia, V. (2008). "El carácter local de las expresiones literales en un aula de 7.º grado". *Educación matemática*, vol. 20.1, ISSN 1665-5826, pp. 5-30. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40512063002

- Castro, E.; Molina, M. (2007). "Desarrollo del pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica". *Educación matemática*, vol. 19. N° 2, ISSN 1665 5826 pp. 67-94. Disponible en file:///C:/Users/User/Desktop/Castro-Molina.pdf

- Dirección de Currícula. Secretaría de Educación. GCBA (2001). *Actualización curricular 7.° grado*. Documento de trabajo, pp. 65-84. Disponible en http://www.sermaestro.com.ar/integrado.pdf

- Douady, R. (1986). "Jeux de cadre et dialectique outil-objet". *Recherches en didactique des mathématique*, vol. 7.2, La Pensée Sauvage, Grenoble.

- Duval, R. (2006). "Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación". En *La Gaceta de la RSME*, vol. 9.1, pp. 143-168. Real Sociedad Matemática Española. Disponible en: http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

- Grimaldi, V.; Itzcovich, H. (2013). "Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de Matemática". En: Broitman, C. (comp.) *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes*. Buenos Aires, Paidós.

- Gutiérrez, S. (2008). “Robert Recorde: el creador del signo igual”. Revista *Suma*, n.° 57, febrero de 2008, pp. 89-95. Disponible en: https://revistasuma.es/IMG/pdf/57/089-095.pdf

- Houdebine, J. (1991). “Changer un terme de membre en changeant de signe ou l’enseignement d’une règle d’action concernant les équations en 4ième”. *Repères-IREM*, n.° 3, pp. 33-42. Disponible en http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/WR/IWR97013/IWR97013.pdf (07-17)

- Kouki, R. (2006). “Équations et inéquations au secondaire. Entre syntaxe et semantique”. *Petit X*, 71, pp. 7-28.

- Novembre, A. (2009). *Las letras, las ecuaciones y las funciones*. Documento publicado por la DINIECE, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.http://portales.educacion.gov.ar/diniece/wp-content/blogs.dir/37/files/2015/11/Las-letras-las-ecuaciones-y-las-funciones.pdf

- Novembre, A., Trillini, M. P., Sanguinetti, D., Nicodemo, M. (2017). *Reflexiones en torno a las Ecuaciones y su Enseñanza*. Actas del 7.º Congreso Uruguayo de Educación Matemática. CUREM 7.

- Panizza, M., Sadovsky, P.; Sessa, C. (1997). *Los primeros aprendizajes algebraicos*. *El fracaso del éxito*. Universidad de Buenos Aires.

- Panizza, M., Sadovsky, P.; Sessa, C. (1999). “La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito”. Revista *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 17, n.° 3. Disponible en: http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21603/21437

- Radford, L. (1997). “On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics”. *For the Learning of Mathematics*, 17 (1), pp. 26-33. Disponible en: http://flm-journal.org/Articles/flm_17-01_04_Radford.pdf

- Radford, L. (1996a). “An Historical Incursion into the Hidden Side of the Early Development of Equations”. En J. Giménez, R. C. Lins y B. Gómez (eds.), *Arithmetics and Algebra Education: Searching for the Future*, Computer Engineering Department, Universitat Rovirai

Virgili, Catalunia, España, 22, pp. 120-131. Disponible en: http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20L.%20(1996)%20-%20An%20Historical%20Incursion%20into%20the%20Hidden%20Side%20of%20the%20Early%20Development%20of%20Equations.pdf

– Radford, L. (1996b). "The roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective". En: N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching*, (39-53). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Disponible en: http://www.luisradford.ca/pub/105_LuisRadfordTherolesofGeometryandArithmetic.pdf

– Radford, L. (1992). "Diophante et l'algèbre pré-symbolique". Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec, 31/32, 73-80. Disponible en: http://www.luisradford.ca/pub/Radford%20L.%20(1991-1992)%20-%20Diophante%20et%20l%20algebre%20pre-symbolique.pdf

– Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Verónica Grimaldi es profesora de Física y Matemática (UNLP).
Se desempeña como profesora adjunta de Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática, y como colaboradora en Didáctica de la Matemática en la Universidad Nacional de La Plata. Integra el equipo docente de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE).
Es coautora de artículos y publicaciones para docentes y alumnos de primaria y secundaria, y de diseños curriculares y documentos de actualización didáctica de la provincia de Buenos Aires.

Horacio Itzcovich es profesor de Matemática (UBA) y especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemática (UNSAM).
Es coordinador de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria en la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) e integrante del equipo de investigación en Didáctica de la Matemática de la UNIPE.
Es coautor del área de matemática de diferentes diseños y documentos curriculares de educación primaria, media y de formación docente. También es autor de artículos en revistas y libros dirigidos a docentes.

Andrea Novembre es profesora de Matemática (UBA).
Es coordinadora del equipo central de matemática en el Instituto Nacional de Formación Docente del Ministerio de Educación y Deportes de la Nación. También coordina el equipo de matemática de la Dirección de Primaria perteneciente a la Dirección General de Escuelas de la Provincia de Buenos Aires.
Es coautora de documentos curriculares de educación primaria y secundaria, así como de artículos en revistas y libros dirigidos a docentes.

SANTILLANA

7 798275 221543